Über die Leistungsfähigkeit von Tachymeterkonstruktionen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Universität zu Marburg

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Hermann Koller
aus Luckenwalde.

Marburg 1914.

Druck von W. Fehrecke & Co., Cassel.

Von der Fakultät als Dissertation angenommen
am 29. Januar 1914.
Berichterstatter: Herr Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. K. Hensel.
Gutachter: Herr Professor Dr. F. v. Dalwigk.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	5
Abschnitt I. Mathematisch-technische Grundlehren der tachymetrischen Entfernungs- und Höhenmessung	21
„ II. Übersicht über Konstruktion und Gebrauch einiger Tachymeter	46
A. Kipptachymeter	47
B. Faden- oder Doppelsichttachymeter	54
C. Reduktionstachymeter	59
„ III. Entstehung und Fortpflanzung der Messungsfehler	65
A. Systematische Fehler	66
B. Zufällige Fehler infolge schräger Lattenhaltung	73
C. Zufällige Beobachtungsfehler	78
„ IV. Mittlere und maximale Fehlerwerte bei sorgfältigen Beobachtungen	95
A. Für Kipptachymeter	95
B. Für Kreistachymeter	102
C. Für das Hammer-Fennelsche Reduktionstachymeter	108
„ V. Mittlere und maximale Fehlerwerte für die drei Tachymeterarten bei eiligen Beobachtungen	122
A. Berechnungsformeln	123
B. Mittlere Fehlerwerte	126
C. Fehlerwahrscheinlichkeit und Maximalfehler	135
„ VI. Schlußbetrachtungen	165

Verzeichnis der Zahlentafeln.

		Seite
Tafel 1.	Feldbuch für die Messung mit dem Gefälltachymeter	50
„ 2.	desgl. für das Kreistachymeter	57
„ 3.	desgl. für das Reduktionstachymeter	63
„ 4.	Fehlerwerte infolge schräger Lattenhaltung	77
„ 5.	Fehlerwerte für sorgfältige Beobachtungen mit dem Gefälltachymeter	101
„ 6.	desgl. für das Kreistachymeter	107
„ 7.	Mittlere Ablesefehler bei Benutzung schräger Indexstriche	112
„ 8.	Schnittwinkel der Indexkurven gegen die Ablesekante beim Hammer-Fennelschen Tachymeter	115
„ 9.	Mittlere Gesamtfehler der Entfernungs- und Höhenmessung für sorgfältige Beobachtungen	119
„ 10.	Fehlerwerte für eilige Beobachtungen	137
„ 11.	Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von Lattenabschnittsfehlern bei Zentimeterablesungen	148
„ 12.	Winkel für gleiche Tangentenunterschiede	186

Einleitung.

Zur Projektierung vieler ausgedehnter Bauwerke, besonders aus dem Gebiete des Straßen-, Eisenbahn- und Wasserbaues ist es nötig, die Lage und Höhe der vom Projekt berührten Flächen und vorhandenen Bauwerke zu kennen. Man führt deshalb technische Vorarbeiten aus, bestimmt die gesuchten Werte und bringt sie in Lage- und Höhenplänen übersichtlich zur Darstellung. Außer bei den photographischen Messungsverfahren, die hier nicht in Betracht kommen, werden Lage und Höhe der Messungsgegenstände örtlich punktweise bestimmt. Häufig ist die Lage der meisten Messungsgegenstände schon aus vorhandenen Karten bekannt. Man kommt dann mit Ergänzungsmessungen zur Lagebestimmung und mit besonderen Höhenmessungen aus. Die wellige Geländeoberfläche denkt man sich ersetzt durch Teile einfachster Regelflächen, besonders durch ebene Dreiecke und windschiefe Vierecke. Man bestimmt Raumkoordinaten von ihren Eckpunkten, rechnet zwischen denselben auf den Geländekanten Punkte gleicher Höhen ein und erhält durch deren Verbindung mittels Höhenkurven eine sehr anschauliche Darstellung der gesamten Geländeform. Bei der Geländeaufmessung werden verschiedene Verfahren angewendet. Besonders in flachem Gelände trennt man oft die Bestimmungen von Lage und Höhe in Flachmessung und Nivellement; in kupiertem Gelände hingegen ist es vielmehr üblich, alle drei Raumkoordinaten zugleich durch Tachymetrie aufzunehmen.

Die Ausführung der tachymetrischen Messung kann im einzelnen recht verschieden sein. Sie richtet sich hauptsächlich nach der Bauart des verwendeten Tachymeters. Kennzeichnend für dieses Verfahren ist die Einmessung der einzelnen Punkte nach Polarkoordinaten unter Benutzung optischer Entfernungsmesser. Die Richtungswinkel werden an einem Horizontalkreis abgelesen; die Höhen werden entweder einnivelliert oder durch trigonometrische Höhenmessung in Verbindung mit der Entfernungsmessung bestimmt. Die einzelnen Tachymeterstandpunkte werden zwischen festen Punkten entweder trigonometrisch durch Vor- oder Rückwärtseinschneiden oder polygonometrisch bestimmt, wobei die Polygonseiten mit dem Entfernungsmesser tachymetrisch gemessen und die Richtungswinkel gegebenenfalls mit Benutzung eines Kompasses bestimmt werden. Messungsproben ergeben sich leicht, wenn zwischen je zwei Tachymeterstandpunkten zwei Wechselpunkte gewählt und mit ihrer Hilfe Streckenlänge und Höhe doppelt übertragen werden. Zur Prüfung der Richtungswinkel kann schätzungsweise an einem zweiten Alhidadenstrich als Hilfszeiger abgelesen werden. Vielfach wendet man statt dieser »Zahlentachymetrie« auch die »Meßtischtachymetrie« an, indem man örtlich die Lage der aufgenommenen Punkte entweder nach Standpunkten getrennt oder in zusammenhängender Darstellung auf einem Meßtisch kartiert, die Höhenzahlen berechnet und beischreibt, gegebenenfalls auch Höhenkurven vorläufig flüchtig einzeichnet.

Bei der Trennung der Lage- und Höhenaufmessung kommen für die Lageaufmessung hauptsächlich drei Liniennetzanordnungen in Betracht, nämlich 1. ein Netz von Haupt- und Nebenlinien abgestufter Ordnung wie bei der gewöhnlichen Stückvermessung, 2. ein Quadratnetz, 3. eine Hauptstationierungslinie mit einzelnen Querlinien. Wir wollen diese 3 Verfahren dem tachymetrischen gegenüberstellen:

1. Wenn man die Lage der Geländeeckpunkte und etwaiger sonst noch zu bestimmender Grenzpunkte von Messungsgegenständen nach Art des Stückvermessungsverfahrens aufmißt, so muß man zur Zeitersparnis vor allem die Längenmessungen einzuschränken suchen. Man kann das dadurch erreichen, daß man die Ordinaten nach Geländepunkten soviel als möglich durch Abschätzen oder Abschreiten bestimmt. Wo ein zerstückelter, gut versteinter Besitz vorhanden und in einer guten Karte dargestellt ist, lassen sich genaue Längenmessungen auch für die Abscissen ganz vermeiden oder doch sehr einschränken dadurch, daß man die Geländepunkte in bezug auf die vorhandenen Grenzen einmißt. Solch ein Aufmessungsverfahren wird des öfteren in geodätischen Lehrbüchern empfohlen. Verfasser hat dieses und das tachymetrische Verfahren auf gleichartigem Gelände praktisch angewandt. Dabei zeigte sich aber bald die Überlegenheit der Tachymetrie. Die eingehende Orientierung auf bewachsenen Flächen, die Aufsuchung der zu benutzenden festen Grenzpunkte und die stete Vergleichung derselben mit ihren Bildpunkten auf der Karte beanspruchte viel mehr Zeit als die tachymetrische Neuaufnahme, die nur an wenige feste Punkte angeschlossen zu werden braucht.

2. Legt man ein Netz von Quadratseiten über die Fläche, so erhält man unschwer die äußeren Netzpunkte durch Einmessen, die inneren durch Einfluchten. Man kann auf diese Weise schnell die Lage einer größeren Anzahl von Geländepunkten bestimmen, kann auch die Netzpunktentfernung so eng wählen und gegebenenfalls noch weitere Zwischenpunkte durch Abschreiten bequem so einmessen, daß die Verbindungslinien der aufgemessenen Punkte als Geländekanten gelten können. Vorteilhaft ist das Verfahren sehr wohl, solange nicht Hindernisse das Durchfluchten der Netzseiten erschweren

und die Ausdehnung der Fläche nur gering ist. Für Geländeaufnahmen flacher, kleiner Flächen eignen sich daher Netzpunktnivellements wohl, erfordern allerdings zum Einweisen des Lattenträgers auf die inneren Netzpunkte mehr Hilfskräfte als tachymetrische Aufnahmen. Bedeutet dieser Umstand schon einen Vorteil des tachymetrischen Aufnahmeverfahrens, so ist dasselbe noch viel mehr vorzuziehen, wenn die freie Übersicht über die Fläche durch Büsche, Baumwuchs oder auch schon durch geringe Geländewellen gehindert ist. Das polygonometrische Stationierungsverfahren der Tachymetrie ist dann offenbar der gleichmäßigen Verwendung gerader Linien weit überlegen. Besonders vorteilhaft ist ferner das tachymetrische Verfahren, wenn außer der Geländeaufnahme auch noch die Einmessung anderer Gegenstände für rein technische Zwecke mit einer derartigen Genauigkeit erforderlich ist, daß Abschreiten nicht ausreicht. Man kann dann statt der an den quadratischen Rost sich anschließenden Meßbandmessung die wesentlich schnellere tachymetrische Längenmessung mittels Entfernungsmessers anwenden.

3. Bei Vorarbeiten für die Projektierung von langgestreckten Bauwerken, also von Straßen, Eisenbahnen und Kanälen wählt man häufig eine Längslinie und Querlinien zur Aufmessung der Geländepunkte; man legt also Längen- und Querprofile durch die Fläche. Dabei muß man mit wenigen Querprofilen möglichst viele Geländeeckpunkte zu erfassen suchen und kann das auch bei flachem Gelände wohl erreichen. Steht die Trace für das Projekt auf Grund vorhandener Lagepläne schon fest oder läßt sie sich örtlich unschwer festlegen, wie es häufig bei Eisenbahnbauten in flachem Gelände und bei Straßenbauten der Fall ist, so ist das Profilverfahren das denkbar beste, denn es können die Originalaufnahmen der Profile unmittelbar der Berechnung und Verteilung der Erdmassen zugrunde gelegt werden. Anderenfalls aber, wenn die

Querprofilaufnahmen doch nicht unmittelbar der Massenberechnung dienen, ist die Tachymetrie wegen der Schnelligkeit, mit der die indirekte Entfernungsbestimmung durchgeführt werden kann, entschieden vorzuziehen. Sie verdrängt schon mehr und mehr das Profilverfahren in der Praxis des Eisenbahnbaus. Es wäre zu wünschen, daß auch in der Wasserbaupraxis die Tachymetrie mehr als bisher statt des Profilverfahrens verwendet würde; denn selbst in anscheinend ebenen Flußtälern finden sich oft auf kurzen Entfernungen schon die verschiedensten Höhenunterschiede von derart wechselnder Form und Verteilung, daß einige Talquerschnitte nur ein unvollkommenes Bild des Flußtalgeländes abgeben und auch als Grundlage für die Auftragung von Horizontalkurven wenig geeignet sind.

Die drei vorerwähnten Aufnahmeverfahren werden noch immer viel zu oft da angewandt, wo die Tachymetrie am Platze ist. Überall da, wo es sich um eine punktweise vorzunehmende Aufmessung von leidlich übersichtlichem Gelände zu technischen Zwecken handelt und der Bauplan noch nicht nahezu festliegt, kann die Tachymetrie als das beste Aufmessungsverfahren gelten. Das bezieht sich auf engere und weitere Genauigkeitsgrenzen, soweit sie für technische Zwecke in Frage kommen; denn bei allen Aufnahmeverfahren, auch bei der Tachymetrie, wächst die Aufnahmegenauigkeit mit der Annäherung des Messungsstützpunktes an den Gegenstand der Aufnahme und mit der Sorgfalt, die auf die einzelne Beobachtung verwandt wird. Auch bei der Tachymetrie kann also ebenso wie bei anderen Messungsverfahren einerseits durch peinlich genaue, sorgfältige Beobachtungen eine größere Genauigkeit erreicht, andererseits aber auch durch Ausführung gröberer, eiliger Beobachtungen statt sorgfältiger bedeutend an Zeit und Kosten gespart werden. Man darf sich nur nicht zum Grundsatz machen, alle Aufnahmepunkte in genau gleicher

Weise aufzumessen, sondern muß während derselben Arbeit zwischen jenen beiden Beobachtungsverfahren unterscheiden. Denn selbst, wenn für einen bestimmten Zweck die eigentliche Geländeaufnahme mit minderer Genauigkeit gleichmäßig durchgeführt werden darf, so sind doch die Anschlußpunkte genauer aufzumessen, weil deren Fehler sich fortpflanzen; ferner sind häufig die Grenzpunkte vieler sonstiger Messungsgegenstände auf Grund genauer Einmessung nachzutragen, z. B. die Ufer von Flüssen, Bächen, Gräben, Seen, die Ränder von Einschnitten und besonders die Böschungs- und Mauerwerkskanten von Bauwerken. Es wird daher zu tachymetrischen Messungen ein Instrument gebraucht, mit dem sorgfältige Beobachtungen möglichst genau und eilige möglichst schnell ausgeführt werden können. Der aufnehmende Ingenieur oder Landmesser aber muß den technischen Zweck seiner Arbeit im Auge haben und ihm entsprechend die Messungsschärfe für die einzelnen Punkte wählen. Er muß aber auch die Leistungsfähigkeit seines Instruments richtig beurteilen, d. h. er muß dessen Verwendungsbereich sowie die Arbeitsschnelligkeit und hauptsächlich die Aufnahmegenauigkeit kennen, die es bei genauen, bezw. bei schnellen Messungen ermöglicht. Da die Entfernungs- und Höhenmessung das Sondergebiet der Tachymetrie darstellt, so sind für rein tachymetrische Messungen diejenigen Instrumente die besten, die Entfernung und Höhe möglichst genau und mit möglichst wenig Nebenrechnung aus den Feldbeobachtungen liefern. Je vollkommener indessen ein Tachymeter diesen Forderungen gerecht wird, umsomehr wird im allgemeinen sein Anwendungsgebiet auf die Tachymetrie eingeengt. Vielfach stellt es sich nun in der Messungspraxis als wünschenswert heraus, daß Tachymeter auch als Nivellierinstrumente zu mittelfeinen Nivellements oder als Theodolite zu Winkelmessungen, Ablotungen usw. gut brauchbar sind. Häufig soll sogar ein Instrument vorzugsweise als Nivellierinstrument

oder Theodolit und nur nebenbei als Tachymeter verwendet werden. Unter Berücksichtigung dieser Sonderzwecke muß die Leistungsfähigkeit der Tachymeter getrennt für die drei Gruppen, d. h. für Nivelliertachymeter, für Tachymetertheodolite und für Spezialtachymeter behandelt werden. In diesen Gruppen lassen sich zugleich auch verschiedene Typen der Entfernungs- und Höhenmeßvorrichtungen betrachten, sodaß bei jener Gruppeneinteilung miteinander sowohl praktische wie theoretische Gesichtspunkte berücksichtigt werden können. Zur Erzielung einer einfachen Darstellung sollen indessen beide Gesichtspunkte nicht vermischt, sondern es sollen die letzteren, d. h. die Konstruktionsprinzipien allein der Einteilung zugrunde gelegt und somit Kipptachymeter-, Faden- und Reduktionstachymeter unterschieden werden. Im Rahmen dieser Einteilung wird dann ein Nivelliertachymeter, ein Tachymetertheodolit und ein Spezialtachymeter als Beispiel der betr. Gruppe besonders eingehend betrachtet werden. Bei der Behandlung der Spezialtachymeter wird zur Würdigung der praktischen Gesichtspunkte noch ein Unterschied zwischen der sogenannten Zahlen- und Meßtischtachymetrie gemacht. Als typische Vertreter der bezeichneten 3 Gruppen werden von vornherein besonders leistungsfähige Tachymeter ausgewählt. Das hierdurch festgelegte Gutachten soll indessen begründet werden dadurch, daß außer der besonders eingehend behandelten Konstruktion auch die anderen bekannteren Bauarten von Instrumenten der betreffenden Gruppe soweit in der Besprechung mitgeführt werden, bis der Nachweis geführt ist, daß sie aus wichtigen Gründen in ihrer Leistungsfähigkeit hinter jener besonders eingehend beschriebenen Konstruktion zurückstehen. Es entsteht dadurch in gedrängter Form eine vergleichende Übersicht über die Leistungsfähigkeit aller bekannteren Instrumente.

Von den oben erwähnten drei Hauptkennzeichen der Leistungsfähigkeit lassen sich der Verwendungsbereich und die Bequemlichkeit und Schnelligkeit der Benutzung am leichtesten aus der Konstruktion erkennen. Besondere Untersuchungen sind indessen nötig, um die Aufnahmegenauigkeit für sorgfältige und eilige Beobachtungen festzustellen. Darin besteht die Hauptaufgabe dieser Arbeit. Aus dem Ergebnis der Genauigkeitsuntersuchungen lassen sich dann Schlüsse auf die zweckmäßigste Art der Verwendung der Instrumente ziehen und Vergleiche über Konstruktionseinzelheiten anstellen. Diese Vergleiche werden den Blick auf die Weiterbildung der Tachymeterkonstruktionen lenken. Es wird nach einer Konstruktion gesucht werden, die einen großen Verwendungsbereich besitzt und die die Vorzüge der drei vorbildlichen Tachymeter möglichst in sich vereinigt.

Vor der Betrachtung der Aufnahmegenauigkeit taucht die Frage auf, welche gemessenen Größen in Bezug auf ihre Genauigkeit zu untersuchen und welche Genauigkeitsmaße für diese Untersuchung zugrunde zu legen sind. Fehler entstehen bereits bei dem Ersatz der welligen Geländefläche durch aneinandergereihte Regelflächen. Auch das geübte Auge wird häufig durch die Bodenbedeckung getäuscht und beurteilt die Höhenverhältnisse je nach dem Standpunkt verschieden. Derartige Fehler äußern sich durch die Auswahl der aufzumessenden »Geländeeckpunkte«. Zu ihnen treten hinzu die Fehler bei der Aufmessung und Ausrechnung der Punktkoordinaten und bei der Darstellung der gesamten Geländeformation durch Höhenkurven. Jeder Punkt wird nach drei Koordinatenrichtungen eingemessen. Seine Festlegung kann also nach drei Hauptrichtungen Fehler aufweisen. Bei der Tachymetrie sind das die Richtungen längs und quer zur Sicht und die Höhenrichtung. Der Längenfehler (längs der Sicht) entsteht bei der optischen Distanz-

messung; zugleich mit ihm entsteht der Höhenfehler. Der Querfehler wird bei der Ablesung am Horizontalkreis begangen. Vielfach wird ein Fehler in der Horizontalprojektion des Punktes in gleicher Weise schädlich sein, gleichgültig nach welcher Richtung er auftritt. Bisweilen, z. B. bei Böschungskanten, ist es allerdings erwünscht, Punkte besonders genau nach einer Richtung (quer zur Böschungskante) festzulegen, während in der zu ihr rechtwinkligen Richtung größere Ungenauigkeiten unschädlich sind. Man wird mit Rücksicht auf mehrere solche Punkte aber nicht das Instrument auf einen bestimmten Punkt, etwa auf den Schnittpunkt mehrerer Böschungskanten stellen und die Sichtrichtungen der Aufmessung in die Böschungskanten legen können. Man kann also im allgemeinen eine Unterscheidung zwischen dem Längen- und Quer- (bezw. Richtungs-) fehler praktisch kaum verwerten und braucht endgiltig nur den Punktfehler der Lage. Von diesem ist der Höhenfehler streng zu unterscheiden.

Da sich der Richtungswinkel genauer bestimmen läßt, als es für die vorliegenden Zwecke überhaupt in Frage kommt, so hängt der Punktfehler der Lage vor allem von dem Längenfehler in der Richtung der Sicht ab. Dieser wächst mit der Zielweite. Er läßt sich daher wohl durch Verringerung derselben, d. h. durch Heranführung des Standpunktes an den Messungspunkt, verringern, jedoch nur bis zu einem gewissen Grade. Der Vorteil tachymetrischer Messung schwindet auch, wenn die Zielweiten nur gering sein dürfen. Die Tachymetrie erscheint nicht mehr vorteilhaft, wenn der Maximalpunktfehler noch kleiner sein muß als etwa 0,2 m. Die Höhenfehler beim Tachymetrieren lassen sich durch Verringerung der Zielneigungen und Zielweiten im allgemeinen innerhalb der Grenzen halten, die auch für mittelfeine Nivellements gelten. Das genügt für alle

Bauzwecke. Daher wird zumeist der Entfernungsfehler das Anwendungsgebiet der Tachymetrie einengen, wenn auf die Genauigkeit der Messungen besonderer Wert gelegt wird. Die Ermittlung seiner Größe für geringe Fernrohrneigungen ist von ausschlaggebender Bedeutung zur Beantwortung der Frage, ob überhaupt Tachymetrie verwendet werden darf. Dann ist es aber auch wichtig, die Entfernungs- und Höhenfehler bei größeren Fernrohrneigungen zu kennen. Sie zeigen, welche Entfernungen und Höhenunterschiede der Beobachter höchstens verwenden darf, um gewisse Maximalfehler innezuhalten. Die Genauigkeitsuntersuchung muß für sorgfältige und eilige Beobachtungen getrennt durchgeführt werden. Aus einem Vergleich der entsprechenden Genauigkeitsmaße erkennt der Beobachter, auf welche Weise er am schnellsten die erforderliche Genauigkeit erreichen kann.

Wir müssen nun zunächst einen Blick auf die bautechnische Verwendung der Vorarbeiten werfen, um die Genauigkeitsmaße aufzufinden, die den Genauigkeitsuntersuchungen zugrunde zu legen sind. Alle vorkommenden Fehler beeinträchtigen die Höhendarstellung des Geländes, die die Grundlage des Projektes bildet. Von jedem einzelnen Fehler, also auch von dem Gesamtfehler, kann man annehmen, daß gleich große positive und negative Fehlerwerte gleich häufig vorkommen.

Höhenfehler von geringerer Größe beeinträchtigen im allgemeinen bei Eisenbahnvorarbeiten nicht die Projektierung des Baues selbst, sondern nur dessen Veranschlagung und Ausführung, da die Grundlagen des Projektes, Linienführung und Höhenlage der Trace nicht genau der jeweiligen Geländehöhe angepaßt werden oder doch jedenfalls nicht angepaßt zu werden brauchen. Jeder einzelne Höhenfehler veranlaßt einen entsprechenden Fehler der Erdmassenermittlung. Die gesamte zu be-

wegende Erdmasse wird aber trotzdem nahezu richtig ermittelt, denn bei der großen Basis der Dämme bezw. Einschnitte muß man vermuten, daß sich die vielen Massenfehler, die ebenso wie die Höhenfehler offenbar einer geraden Fehlerfunktion folgen, gegenseitig ausgleichen. Die gesamte Erdmasse wird nun aber durch die Massenverteilung in eine Anzahl kleinerer Abschnitte zerlegt. Für jeden derselben darf man keineswegs eine Fehlerausgleichung annehmen. Ein einziger Höhenfehler in erlaubten Grenzen kann leicht einen Massenfehler von 100 cbm und mehr erzeugen. Durch zufällige ungünstige Fehleranhäufung können also merkbare Fehler entstehen. Sie übertragen sich noch weiter auf die Ermittlung der Schwerpunkte und Transportweiten. Der Massenausgleich wird nicht, wie beabsichtigt, der günstigste. Der Kostenanschlag enthält entsprechende Fehler. Auch Aufnahmefehler bei Eisenbahnvorarbeiten machen sich also fühlbar. Ihr Einfluß muß während des Baues unschädlich gemacht werden. Die Massenverteilung wird gegenüber dem Projekt geändert, evtl. unter Zuhilfenahme von Seitenablagerung und -Entnahme. Geringe nachträgliche Aenderungen des ursprünglichen Arbeitsplanes sind ohnehin nötig, da sich die bleibende Auflockerung des Bodens, seine Verwertbarkeit zu anderen Bauzwecken usw. nicht im voraus sicher beurteilen lassen. Schließlich haben alle Aufnahmefehler der geometrischen Vorarbeiten im allgemeinen nur die Folge, daß die wirkliche Bausumme von dem Voranschlag abweicht. Ist eine derartige Abweichung nicht beträchtlich, so spielt sie bei der sonstigen Unsicherheit der Kostenveranschlagung keine wesentliche Rolle. Höhenfehler bei Eisenbahnvorarbeiten können also immerhin mit ziemlich großen Beträgen in Kauf genommen werden und zwar umsomehr, als durch die absichtlich geringer gewählte Messungsschärfe die Kosten der Vorarbeiten ermäßigt werden. Allgemeine Bestimmungen

über die Maximalfehler bei Eisenbahnvorarbeiten sind bisher nicht vorhanden. Bei mehreren preußischen Eisenbahndirektionen des Ostens sind Höhendifferenzen bis zu 30 cm, die sich als Fehler der Vorarbeiten während der späteren, genauen Streckennivellements ergeben, noch zugelassen. Es wird aber in den Dienstanweisungen, die diese Bestimmungen enthalten, darauf hingewiesen, daß sich bei sorgfältiger Tachymetrierung Übereinstimmung bis zu 10 cm erreichen lasse. Bei größeren Abweichungen sollen schon kleine Verschiebungen der Trace in Erwägung gezogen werden. Es werden dadurch unnötige Weiterungen, die dem Baufortschritt nicht dienlich sind, von vornherein vermieden.

Bei Straßenbauten wird der Massenausgleich möglichst durch Querausgleich bewirkt. Höhenfehler lassen sich dann durch geringe Linienverschiebungen gewöhnlich leicht erreichen. Für den Längenausgleich gelten ähnliche Erwägungen wie beim Eisenbahnbau.

Anders liegen die Verhältnisse bei Vorarbeiten zu Wasserbauten, die eine Melioration des Bodens als Haupt- oder Nebenzweck anstreben. Da Wasser das Bestreben hat, alles zu nivellieren, so müssen bei Bauten, die eine kulturfördernde Benutzung des Wassers bezwecken, naturgemäß die Höhenverhältnisse, auch die des Geländes, besonders genau beachtet werden. Daher sind die Geländehöhen während der Vorarbeiten möglichst genau aufzunehmen. Größere Fehler können leicht der Zweckerfüllung des Bauwerks hinderlich sein bezw. Änderungen des Projektes veranlassen. Solche Nachteile sind umsomehr zu befürchten, je flacher das Gelände ist. Höhenfehler der Geländedarstellung erzeugen dann nicht nur Fehler der Massen- und Kostenberechnung, sondern auch Unsicherheiten und Fehler in der Ermittlung des Grundwasserstandes und des Geländegefälles. Dadurch wirken sie unmittelbar auf die

Ausbildung des Projektes und dessen Zweckerfüllung. Die Massen- und Kostenberechnung einzelner Abschnitte und die Linienführung von Ent- und Bewässerungsbauten wird bereits durch Einzelfehler der Höhendarstellung, die Grundwasserstandsermittlung und die Höhenlage der Bauten wird hingegen nur durch Durchschnittsbeträge der Fehler beeinflußt.

Soll etwa in flachgeneigtem Boden eine Drainage verlegt, eine Oberflächenentwässerung oder eine Bewässerung angelegt werden, so muß der Projektierende das vorhandene geringe Bodengefälle sorgsam für den betr. Zweck ausnützen. Er braucht eine Arbeitskarte mit Horizontalkurven von geringen Höhenabständen. Oft werden nur Abstände von 20 und selbst 10 cm gewählt, während bei Eisenbahnbauten solche von 1 m die Regel bilden. Bei sehr geringen Kurvenabständen sind schon Höhenfehler von 10 cm recht unerwünscht. Sie lassen sich aber nur bei ganz flachem Wiesenboden, Moorflächen usw. vermeiden, denn auf Ackerboden werden durch die Richtung des Pflügens schon Höhenunterschiede von etwa 10 cm veranlaßt. Würden zu diesen unvermeidlichen Beträgen noch ebenso große Messungsfehler hinzutreten, so würde die Durchbildung eines Meliorationsprojektes unnötig erschwert. Wählt beispielsweise ein Kulturtechniker bei der Projektierung einer Drainage in einer mäßigen Bodensenkung für einen Drainstrang nur eine geringe Tiefe von etwa 90 cm und es findet sich beim Bau, daß infolge eines Aufnahmefehlers statt 90 nur etwa 60—70 cm Überschüttungshöhe vorhanden sind, so muß entweder dieser Teil des Projektes mit allem, was von ihm abhängt, geändert werden, oder aber — was bei der Ausführung durch Unternehmer nicht selten eintreten wird — der Strang wird in der geringen Tiefe gebaut. Es ist dann zu befürchten, daß er bei starkem Frost zerstört wird und daß die höher gelegenen Teile sumpfig

werden; im günstigsten Falle entwässert er das anliegende Erdreich nicht in der gewünschten Tiefe und Breite. Entsprechendes gilt für Projekte anderer Art. Auch bei Wiesenmeliorationsprojekten können durch geringe Höhenfehler der Geländedarstellung leicht mancherlei Übelstände, die die Zweckerfüllung des Bauwerks gefährden, eintreten. Die Erörterung weiterer Einzelfälle würde hier zu weit führen.

Aus der bisherigen Darstellung geht bereits hervor, daß einerseits sowohl einzelne Messungsfehler, wie auch andererseits gewisse Durchschnittsbeträge derselben bestimmte Maximalwerte nicht überschreiten dürfen. Bei der Verwertung mehrerer abweichender Messungen finden in der Bautechnik keine strengen Ausgleichungen statt, daher erscheint es zweckmäßig, als Genauigkeitsmaß für gemittelte Größen den mittleren Fehler zu wählen, der ohnehin zur Vergleichung verschiedener Messungen verwendet wird. Der Aufnehmende kann nun bekanntlich keine sichere Gewähr dafür übernehmen, daß seine Messungsergebnisse innerhalb gewisser Grenzfehler genau sind. Große Fehler sind bei geeignetem Messungsvorgang nun zwar nicht unmöglich, wohl aber nur wenig wahrscheinlich, und deshalb kann der Aufnehmende einen Fehler von bestimmter, sehr geringer Wahrscheinlichkeit nahezu als Maximalfehler betrachten. Hat er nach den vorstehenden Erwägungen mit Rücksicht auf den Zweck seiner Aufnahme den Grenzfehler ermittelt, den er nicht überschreiten sollte, so muß er alsdann ein solches Messungsverfahren wählen, bei dem die Begehung des festgestellten Grenzfehlers höchstens nur noch jene bestimmte, sehr geringe Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Weder bei der Wasserbauverwaltung noch bei den Meliorationsbehörden bestehen allgemeine Vorschriften über die Höhe zulässiger Fehler. Ingenieure und Land-

messer müssen sich daher selbst aus technischen Erwägungen heraus die nötigen Beschränkungen auferlegen. Aus den vorstehenden Erörterungen kann bereits geschlossen werden, daß je nach dem technischen Zweck der Messung Höhenfehler über 10—30 cm schon vermieden werden sollten. Durch diese (freiwillige) Festsetzung werden auch die mittleren Fehler offenbar schon innerhalb der zweckmäßigen Grenze gehalten.

Zufolge der Festlegung der Höhenfehler sind auch die Punktfehler der Horizontalprojektion von Geländepunkten ausreichend begrenzt. Bezeichnet $\mathfrak{M}_h$ den Maximalhöhenfehler und ν die größte Geländeneigung an dem Aufnahmepunkt, so darf der Maximalpunktfehler nicht größer sein als

$$(1) \qquad \mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_h \operatorname{ctg} \nu,$$

denn ist er größer, so erzeugt er, wie sich aus einem Vertikalschnitt durch das Gelände leicht erkennen läßt, auch einen größeren Höhenfehler als $\mathfrak{M}_h$. In kupiertem Gelände müssen daher die Längen wesentlich genauer bestimmt werden als in flachem.

Selbstverständlich können nicht an jedem Messungspunkt besondere Berechnungen darüber angestellt werden, welche Genauigkeit für die Aufnahme erwünscht ist. Die Einfachheit des Aufnahmeverfahrens ist zu wahren. In der Praxis braucht man deshalb für dasselbe Instrument nur zwei Arten von Beobachtungen, nämlich sorgfältige und eilige zu unterscheiden. Überall, wo die letzteren nicht ausreichen, sind die ersteren vorzunehmen. Der aufnehmende Techniker braucht sich nur den Maximalfehler, den er mit seinem Instrument bei eiligen Beobachtungen und Entfernungen von etwa 50; 100 und 150 m zu erwarten hat, zu merken. Stellt er sich dann in Zweifelsfällen einen aus diesen Fehlermaßen ge-

bildeten Fehlerkörper räumlich um den Punkt herum vor, so weiß er sofort, ob solche eiligen Beobachtungen ausreichen oder nicht. Er kann also stets eine sachgemäße Aufnahme erzielen. Der Fehlerkörper kann dabei ausreichend genau als ein Cylinder mit $\mathfrak{M}_p$ als Halbmesser und 2 $\mathfrak{M}_h$ als Höhe angenommen werden. Es genügt auch, Durchschnittsabmessungen von Fehlerkörpern zugrunde zu legen, die der bisher erreichten Aufnahmegenauigkeit ungefähr entsprechen. Solche Abmessungen werden im folgenden ermittelt. Sie setzen sich aus bestimmten Fehleranteilen zusammen. Zur Aufstellung möglichst einwandfreier Ergebnisse werden, soweit sie erreichbar sind, nur solche Maße der Fehleranteile verwendet werden, die sich aus praktischen Messungen ergeben haben.

Man kann den Fehlerkörper auf zweierlei Weise verkleinern: 1) durch zweckmäßige Wahl der Geländepunkte und nähere Aneinanderlegung derselben, 2) durch genauere Beobachtungen. Bei eng benachbarter Lage der Aufnahmepunkte sind nur noch ganz unbedeutende Geländewellen auszugleichen, sodaß die dadurch entstehenden Fehler bedeutungslos werden. Bisweilen wird etwa vorgeschrieben, die Geländepunkte in höchstens 20-40 m Entfernung zu wählen.

Einzelne Teile der gewählten Aufgabe sind bereits mehrfach behandelt worden. Zur Erzielung einer geschlossenen Darstellung erscheint es indessen vorteilhaft, auch bekannte Ableitungen mit aufzuführen. Besonders die beiden Abschnitte I und II können im Einzelnen nichts sachlich Neues bieten. Eine gemeinsame Behandlung der bekannten Einrichtungen und ihres Gebrauchs läßt sich aber als Grundlage für die weiteren Ausführungen nicht umgehen. Die benutzten Schriften sind im Literaturverzeichnis aufgeführt.

Abschnitt I.

Mathematisch-technische Grundlehren der tachymetrischen Entfernungs- und Höhenmessung.

Für die übliche Tachymetrie kommen nur zwei Arten von Entfernungs- bezw. Höhenmessern in Frage, von denen jede auf zweierlei Weise benutzt werden kann. In einem langen, schmalen, Dreieck KOU (Fig. 1) wird

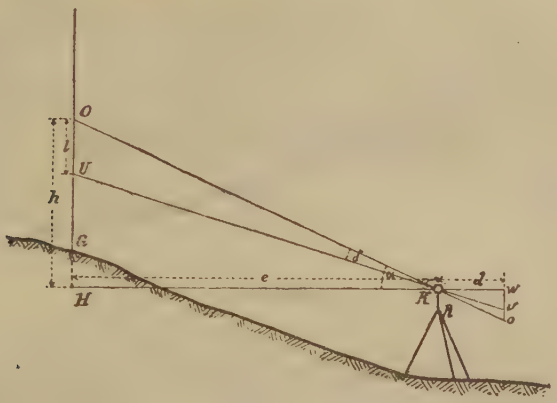


Fig. 1.

an einer Latte die Grundlinie OU durch Ablesungen vom Fernrohr aus bestimmt, das sich bei K befindet. Dazu wird beim mechanischen oder Kippdistanzmesser das Fernrohr aus der Lage KO in die Lage KU oder umgekehrt gekippt. Die beiden Sichten KO und KU werden also nacheinander hergestellt und beobachtet. Dagegen sind beim Fadendistanzmesser — den man auch

Doppelsichtdistanzmesser nennen kann — beide Sichten bereits in einer Fernrohrlage durch Fäden oder sonstige Marken in der Fernrohrbildebene festgelegt. Bei jedem der beiden Distanzmesser kann der Scheitelpunkt des spitzen „distanzmessenden" Winkels δ in der Stehachse liegen oder auch in der Sichtrichtung verschoben sein. Den letzteren Fall zeigt Fig. 2. Statt K bildet dann F die Dreieckspitze.

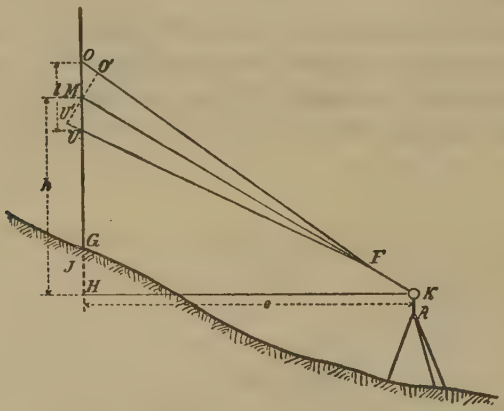


Fig. 2.

Kippdistanzmesser lassen sich an Theodoliten und Nivellierinstrumenten anbringen. In Bezug auf ihre Konstruktion unterscheiden sie sich hauptsächlich durch die Vorrichtungen, die zur Begrenzung der einzelnen Kipplagen dienen. Zumeist hat man die Instrumente mit Mikrometerschrauben, bisweilen auch mit Skalen und Kontakten versehen. Die Verwendung einer Mikrometerschraube an einem Nivelliertachymeter ist in Fig. 3 angedeutet. Die Stehachse A besitzt einen festen Arm C mit der zur Stehachse parallel gelagerten Schraubenmutter J. Die Schraube T besitzt in ihrer Achse eine Spitze,

gegen welche die ebene Gleitfläche G durch die Feder F gedrückt wird. G befindet sich an einem Arm B, der um die Kippachse K drehbar gelagert ist und den Oberbauhes Nivellierinstruments, im wesentlichen also Fernrohr und Libelle trägt. Die auf der Schraube sitzende Trommel E trägt auf ihrem Umfang eine Einteilung in 100 Teile. Ganze Umdrehungen werden an der Skala D angezeigt, die durch die Feder M ständig gegen E gedrückt und innerhalb eines an C befestigten Armes N

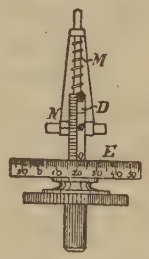


Fig. 3b.

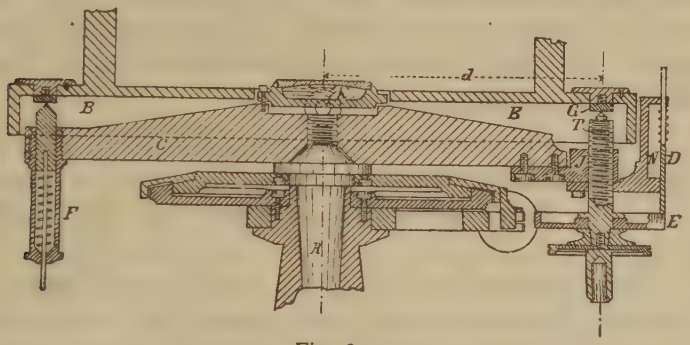


Fig. 3a.

geführt wird. Der Abstand d der Achsen von T und A ist auf ein rundes Vielfaches der Schraubenganghöhe g, z. B. auf 100 g abgestimmt. Derartige „Gefällschrauben" sind zuerst von dem braunschweigisch-lüneburgischen Ingenieurobersten Hogrewe um 1800 verwendet worden. Professor Vogler hat sie an einem von Rosenberg erbauten Gefällschraubentachymeter wieder verwenden lassen (etwa wie in Fig. 3 angedeutet*) und hat die folgenden Bedingungen für ihre Anordnung aufgestellt:

* Die Fig. 3 ist von Herrn Mechaniker Rosenberg-Berlin freundlichst zur Verfügung gestellt worden.

1. Kipp- und Schraubenachse müssen sich rechtwinklig in unveränderlichem Abstand kreuzen.

2. Der Stützpunkt (Spitze) der Schraube soll auf einer Geraden gleiten.

3. Diese Gerade soll die Kippachse schneiden.

4. Bei wagerechter Sicht muß der Stützpunkt der Schraube von der Kippachse den kürzesten Abstand haben.

Sind die Voglerschen Bedingungen erfüllt, so kann die horizontale Sicht durch eine Umdrehung der Gefällschraube um $\text{arctg}\,\frac{g}{d} = \delta$ verstellt werden. Für alle Kipplagen sind Latten- und Schraubenablesungen einander proportional, sodaß die mathematischen Beziehungen der betr. Messungsgrößen durch Figur 1 vollständig gekennzeichnet werden.

Die Stampfersche Sehnenschraube wird hier übergangen, weil sie keine so einfache, für die Tachymetrie erwünschte Berechnungsweise zuläßt, wie die Gefällschraube.

Die Wirkung des einfachen Faden- oder Reichenbachschen Distanzmessers, der bereits 1674 von dem Italiener Geminiano Montanari erfunden worden ist, erhellt aus Fig. 4. Er besteht aus 2 Parallelfäden *o* und *u*,

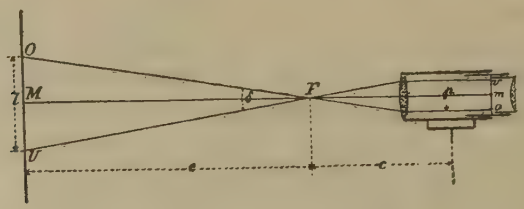


Fig. 4.

die gewöhnlich mit gleichen Abständen $\frac{p}{2}$ vom Horizontalfaden *m* ober- und unterhalb desselben ausgespannt

sind oder aus entsprechenden auf Glas eingeschnittenen Strichen. Die Marken o und u dienen zur Kennzeichnung von Bildpunkten der durch die Objektivlinse erzeugten Abbildung. Sie legen die beiden durch den vorderen Brennpunkt F des Objektivs gehenden Sehstrahlen FO und FU fest. Im gleichen Verhältnis mit der Entfernung der Latte vom vorderen Brennpunkt F wächst auch der von den beiden Sehstrahlen begrenzte Lattenabschnitt $OU = l$. Steht die Latte senkrecht zur Sicht, so ergibt sich vom Instrumentenstandpunkt aus die Entfernung

$$e = c + lk. \tag{1}$$

Hierin ist die „kleine Konstante“ c je nach der Bauart des Instruments verschieden und beträgt etwa 0,3—0,5 m. Wird die Objektivbrennweite mit f bezeichnet, so erhält die große Konstante den Wert:

$$k = \frac{f}{p}. \tag{2}$$

Sie wird gewöhnlich durch die Wahl von $p = f$: 100 möglichst genau zu 100 gemacht; indessen muß bei vielen Tachymetern die Differenz gegen 100 — wenigstens zu genauen Messungen — berücksichtigt werden.

In heutiger Zeit verwendet man allgemein feste Fäden und „selbst ablesbare“ Latten mit Centimeter-, bisweilen auch mit Decimeterteilung, da man billige, gute Fernrohre mit starker Vergrößerung herstellen kann, die noch auf weite Entfernungen über 200 m unmittelbare Ablesungen ermöglichen. Früher hat man mangels guter Fernrohre sowohl zum Nivellieren wie auch zum Distanzmessen Latten mit Zielscheiben verwendet, die vom Fernrohrbeobachter eingerichtet und vom Lattenhalter abgelesen wurden. In jener Zeit hat der Mechaniker Meyerstein nur einen Faden des Fadendistanzmessers fest, den zweiten durch eine Mikrometerschraube verschiebbar

angeordnet. Die Distanzlatte dazu besaß feste Zielmarken. Aehnliche Distanzmesser mit Okularfilar-Schraubenmikrometern sind bis in die neueste Zeit hinein bei österreichischen Tachymeterkonstruktionen verwendet worden, um eine Veränderlichkeit der Konstanten k für geneigte Sichten herbeizuführen. Eine zu eingehenden Genauigkeitsuntersuchungen verwendete Konstruktion für ein Okularschraubenmikrometer ist in Fig. 5 angedeutet.

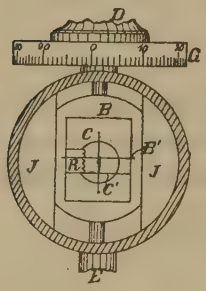


Fig. 5.

Zwischen den Führungen J kann der bewegliche Rahmen B mittels einer Mikrometerschraube (bei D) auf- und abgeschoben werden. Er trägt den beweglichen Horizontalfaden B' und umfaßt die kreisförmig durchbrochene, feste Platte C, die den fünfzähnigen Rechen R und das feste Fadenkreuz C' trägt. Toter Gang der Mikrometerschraube soll durch eine Feder (bei E) vermieden werden. Die Schraubentrommel G ist in 100 Umfangsteile geteilt. Die Zahnteilung des Rechens ist gleich der Ganghöhe der Schraube, sodaß sich die Lage des beweglichen Fadens B' durch Rechen- und Trommelablesung bestimmen läßt, ganz wie es beim Schraubenmikroskop üblich ist.

Vorrichtungen zur nachträglichen Abstimmung der Konstanten k auf einen runden Wert, z. B. 100, haben sich wegen ihrer Veränderlichkeit als unzweckmäßig erwiesen; auch Huygenssche Okulare, die durch Verschiebung des Diaphragmas eine Justierung, zugleich aber auch eine unfreiwillige Änderung von k gestatten, gelten nicht mehr als vorteilhaft. Wohl aber hat sich die Objektivkonstruktion des italienischen Offiziers Porro zu halten vermocht, die zugleich eine Veränderlichkeit von

c und k ermöglicht, sodaß $c = o$ und $k = 100$ gemacht werden kann. Porros anallaktisches Fernrohr (Fig. 6)

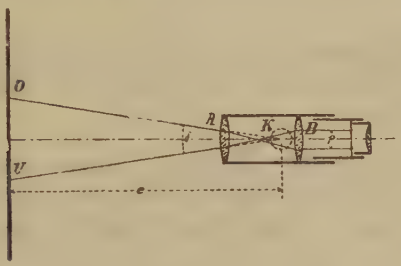


Fig. 6.

besitzt zwei Objektivlinsen, das eigentliche Objektiv A und das Kollektiv B. Sie erhalten eine derartige Lage, daß die Verlängerungen der durch die beiden Fäden festgelegten Zielstrahlen von den Lattenpunkten O und U rückwärts über A hinaus sich in der Kippachse K des Instruments schneiden. Unmittelbar von der Kippachse aus ergeben sich also die horizontalen Zielweiten nach der Formel

(3) $$e = l \cdot k$$

Die äquivalente Brennweite des Objektivsystems ist geringer als die des Objektivs allein. Die optischen Eigenschaften eines anallaktischen Fernrohrs stehen denen eines einfachen astronomischen nach; dennoch leistet das anallaktische Fernrohr gute Dienste, besonders zur Durchbildung von Reduktionstachymetern.

Wie schon erwähnt, wird für die hier in Betracht kommenden Tachymeter fast ausnahmslos die Konstante $k = 100$ gewählt, die die einfachste Rechnung der Entfernung gestattet. Der distanzmessende Winkel δ erhält dann den Wert $\varrho' : 100 = 34'\ 22{,}6''$. Er ist so klein, daß man die Konstante k sowohl aus seinem analytischen Maß wie auch aus Winkelfunktionen herleiten kann; ausreichend genau ist also

$$(2^*) \qquad k = \frac{1}{\delta} = \operatorname{ctg}\,\delta = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = \frac{1}{\sin\,\delta}.$$

Die geringen Unterschiede zwischen diesen Bestimmungen kommen gegenüber den unvermeidlichen Messungsfehlern nicht in Betracht.

Die vorliegenden Zwecke lassen eine gemeinsame Herleitung der Formeln für Kipp- und Fadendistanzmesser erwünscht erscheinen. Bei beiden gilt für geneigte Sichten, wenn man $e' = e - c \cdot \cos\alpha$ und $h' = h - c \cdot \sin\alpha$ setzt, nach Fig. 1 und 2:

$$(4) \qquad l = e'\{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha - \delta)\} = e'\,\Delta\operatorname{tg}\alpha$$

und deshalb:

$$(5) \qquad e' = \frac{l}{\Delta\operatorname{tg}\alpha};$$

ferner ist:

$$(6) \qquad h = e\operatorname{tg}\alpha.$$

Beim Kippdistanzmesser wird nun nach Professor Lorber die Kippbewegung am besten so begrenzt, daß die Tangentendifferenz von beliebiger Anfangsneigung aus eine konstante Größe wird. Man setzt $1 : \Delta\operatorname{tg}\alpha = k$ und erhält für die Entfernung e unmittelbar die Ausdrücke (1) oder (3).

Die Höhe wird:

$$(6^*) \qquad h = l \cdot k \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Durch Auswahl geeigneter Kipplagen läßt sich das Produkt $k \cdot \operatorname{tg}\alpha = m$ zu einer runden Zahl machen. Nimmt man m bei aufwärts gerichteten Sichten negativ, bei ab-

wärts gerichteten positiv, so wird:

(7) $$h = l \cdot m$$

Die Sichthöhe, als Lattenablesung gedacht, ergibt sich zu:

(8) $$H = O + l \cdot m.$$

An dem Voglerschen Gefällschraubentachymeter (Fig. 1 und 3) steht bei lotrechter Stehachse auch die Schraube lotrecht und daher parallel zur Latte. Die Ablesung $w = 10$ entspricht der wagerechten Sicht, also der zu berechnenden Höhe H. Die zugleich mit der Schraube bewegliche Schraubenskala wird am besten von unten nach oben durchlaufend beziffert, sodaß die Ablesungen am festen Zeiger, wie Vogler es vorschreibt, um so größer ausfallen, je höher die Sicht nach vorn ansteigt oder je tiefer die Schraube selbst heruntergeschraubt wird.

Von w aus stellt man die Schraube um eine ganze Anzahl von Schraubengängen auf o und dann um eine Schraubenumdrehung vor oder zurück auf u ein und ließt die zugehörigen Lattenhöhen O und U ab. Allgemein ist dann

(9) $$k = \frac{d}{o - u}$$

und

(10) $$m = \frac{w - o}{o - u}$$

worin infolge der Einrichtung des Instruments und des vorbeschriebenen Lorberschen Einstellungsverfahrens $d = 100$ und $o - u = 1$, mithin auch in (1) und (3) bezw. in (7) und (8) $k = 100$ und $m = w - o$ zu setzen ist.

Entfernung und Höhe sind also sehr einfach zu berechnen, weil die jedesmaligen Lattenabschnitte nur mit runden Festwerten zu multiplizieren sind. Die Vorzeichen ergeben sich gleichsam von selbst, denn e ist stets positiv zu setzen und h wird positiv oder negativ, je nachdem die Differenz $m = w - o$ es ist. Ob man O als obere oder untere Lattenablesung einführt, ist belanglos, wenn nur O und o einerseits und U und u andererseits sich entsprechen.

Wählt man für o und u keine vollen Schraubenumdrehungen, sondern nach Hogrewe ein konstantes Lattenmaß l, so wird

$$e = \frac{l \cdot d}{o - u} \tag{11}$$

$$h = \frac{l \cdot (w - o)}{o - u.} \tag{12}$$

Die Ausrechnungen sind bei diesem Messungsverfahren wesentlich umständlicher, weil Divisionen durch veränderliche Werte auszuführen sind. Bei der Tachymetrie kommt es auf schnelle Auswertung der Ergebnisse an; deshalb kommt das Hogrewesche Messungsverfahren hier kaum in Betracht. Immerhin kann man aber vorübergehend das Lorbersche Verfahren verlassen und zur Erzielung größerer Genauigkeit die Einstellungsdifferenz $o - u$ größer als 1 wählen. Wir werden diesen Fall am Schluß des Abschnittes III behandeln.

Bei der Berechnung von e und h aus schrägen Sichten mit dem Fadendistanzmesser entstehen, je nachdem die Höhenwinkel bis zur oberen oder unteren oder bis zur mittleren Sicht $K\,M$ gezählt werden, verschiedene Gleichungen, die infolge verschiedener Einrich-

tungen der tachymetrischen Instrumente auch alle praktische Anwendung gefunden haben. Die beiden Fälle, daß der Höhenwinkel einmal bis zur oberen, das andere Mal bis zur unteren Sicht gezählt wird, mögen beim Fadendistanzmesser durch Vorzeichen besonders unterschieden werden, während die Rechnungsgrößen selbst nur mit ihren absoluten Beträgen in Rechnung gestellt werden. Dann können in (4) alle Fälle berücksichtigt werden durch die Schreibweise

$$(4^*) \qquad l = e' \{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} (\alpha \mp \delta)\}$$

Dabei gilt das obere Vorzeichen für Höhenwinkel bis zur oberen und Tiefenwinkel bis zur unteren Sicht, das untere Vorzeichen gilt dagegen für Tiefenwinkel bis zur oberen und für Höhenwinkel bis zur unteren Sicht. Statt der Differenz der Tangenten kann man einen Quotienten aus Sinus und Cosinus einführen. Daher wird:

$$(13) \qquad l = e' \frac{\sin \delta}{\cos \alpha \cdot \cos (\alpha \mp \delta)}$$

und nach Zerlegung der Winkelsumme und leichter Umformung:

$$(14) \qquad e' = l \{\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg} \delta \pm \sin \alpha \cos \alpha\}$$

Setzt man $\operatorname{ctg} \delta = k$, so ergibt sich für die gesamte Entfernung und Höhe unter Berücksichtigung der kleinen Konstanten c:

$$(15) \qquad e = k\, l (\cos^2 \alpha \pm \frac{1}{k} \sin \alpha \cos \alpha) + c \cdot \cos \alpha$$

Dafür läßt sich auch schreiben, falls $c = o$ ist:

(15*) $$e = k\,l\cos^2\alpha\,(1 \pm \frac{1}{k}\operatorname{tg}\alpha).$$

Wird die Formel (6) auf die vorstehenden Gleichungen angewendet, so findet sich die Höhe; dabei ist aber tg α für die Tiefenwinkel negativ zu rechnen. Wird nur die obere Sichtrichtung als der geneigte Schenkel des Winkels α in Betracht gezogen, so gilt also:

(16) $$h = \pm k\,l(\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{k}\sin^2\alpha) \pm c\cdot\sin\alpha$$

Diese Formeln werden den tachymetrischen Rechnungen nach Tichy und Starke zugrunde gelegt. Für die Klammerausdrücke sind Tafeln aufgestellt. Die Höhen- und Tiefenwinkel werden bis zur o b e r e n Sicht, h wird bis O gezählt. Die oberen Vorzeichen gelten dann für Höhenwinkel, die unteren für Tiefenwinkel.

Beim Puller-Breithauptschen Tachymeter werden den Messungen die Höhenwinkel der u n t e r e n Sicht zugrunde gelegt. e und h werden mechanisch ausgewertet durch Einrichtungen, die sich im Anschluß an Formel (13) leicht erklären lassen. Statt ihrer kann man unter zutreffender Änderung der Vorzeichen schreiben:

$$e' = l\,\frac{\cos\alpha\cdot\cos(\alpha \pm \delta)}{\sin\delta}$$

Das obere Vorzeichen gilt nun wiederum für Höhenwinkel, das untere für Tiefenwinkel. Puller setzt $1 : \sin\delta = k$. Mit diesem Wert ergibt sich für die gesamte Entfernung bezw. Höhe:

(17) $$e = \{ k\,l \cdot \cos(\alpha \pm \delta) + c \} \cos\alpha.$$

(18) $$h = \pm \{ k\,l \cos(\alpha \pm \delta) + c) \} \sin\alpha.$$

h rechnet dabei bis zur Ablesung U. Diese Formeln bilden die mathematische Grundlage für eine mechanische Reduktion von $k\,l$ auf e und h.

Beim einfachen tachymetrischen Theodoliten werden die Höhenwinkel von der mittleren Sicht aus gezählt. Für Formel (4) ist dann zu schreiben:

(4*) $$l = e' \{ \operatorname{tg}(\alpha + \tfrac{\delta}{2}) - \operatorname{tg}(\alpha - \tfrac{\delta}{2}) \},$$

was zugleich für Höhen- und Tiefenwinkel gilt. Wird die Differenz der Tangenten wie vorher umgeformt, so entsteht:

$$l = e' \cdot \frac{\sin\delta}{\cos(\alpha + \frac{\delta}{2}) \cos(\alpha - \frac{\delta}{2})}$$

Daraus folgt, wenn die Funktionen der Winkelsummen durch die der einzelnen Winkel ersetzt werden nach einfacher Umformung:

$$e' = l \cdot \frac{\cos^2\alpha \cdot \cos^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\alpha \cdot \sin^2\frac{\delta}{2}}{2 \sin\frac{\delta}{2} \cos\frac{\delta}{2}}$$

Wenn die Division ausgeführt und $\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$ durch k ersetzt wird, so ergibt sich:

$$e' = l \left\{ k \cos^2 \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{4k} \right\}$$

Durch Hinzufügung der kleinen Konstanten c entsteht:

$$e = c \cdot \cos \alpha + lk \cos^2 \alpha - \frac{l}{4k} \sin^2 \alpha$$

und unter Benutzung der Formel (6):

$$h = c \cdot \sin \alpha + lk \sin \alpha \cos \alpha - \frac{l}{4k} \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

Die letzten Glieder in diesen Formeln sind sehr klein. Man kann deshalb in ihnen $l = \frac{e}{k \cos^2 \alpha}$ setzen und erhält für diese letzten Glieder allein unter Berücksichtigung von (6):

$$\triangle e = - \frac{e}{4k^2} \operatorname{tg}^2 \alpha = - \frac{h^2}{4k^2 e}$$

$$\triangle h = - \frac{e}{4k^2} \operatorname{tg}^3 \alpha = - \frac{h^3}{4k^2 e^2}$$

In der hier betrachteten Tachymeterpraxis vermeidet man im allgemeinen größere Werte für e bzw. h als etwa 200 bzw. 50 m. Für diese Größen erreichen die Glieder $\triangle e$ und $\triangle h$ bei weitem nicht die Größe von 1 cm. Man hat sie deshalb völlig zu vernachlässigen und rechnet nur mit den Formeln:

(19) $$e = c \cdot \cos\alpha + l\,k\cos^2\alpha.$$

(20) $$h = c \cdot \sin\alpha + l\,k\sin\alpha\cos\alpha.$$

Dieselben Formeln erhält man, wenn man in Figur 2 $U'MO'$ rechtwinklig zu MK zieht u. $U'O' = l \cdot \cos\alpha$ setzt. Daher ist der Schluß berechtigt, daß man mit völlig ausreichender Schärfe die kurzen Strecken OO' und UU' zu zu MK parallel annehmen kann.

Häufig kann man durch geringe Abänderung des ersten, ohnehin kleinen Gliedes noch eine weitere Annäherung vornehmen und schreiben:

(21) $$e = (\frac{c}{k} + l)\,k\cos^2\alpha$$

(22) $$h = (\frac{c}{k} + l)\,k\sin\alpha\cos\alpha$$

Die bisher für den Fadendistanzmesser abgeleiteten Formeln gelten für feste Lage der Distanzfäden und veränderlichen Lattenabschnitt. Sie können also für das auf S. 26 bereits erwähnte Okularfilar-Schraubenmikrometer (das der Vollständigkeit wegen nicht übergangen werden kann) benutzt werden, falls der bewegliche Faden eine bestimmte Einstellung erhält. Zur Ableitung einer Formel für beliebigen Fadenabstand ist die besondere Einrichtung des Mikrometers zu berücksichtigen. In der Verschiebungsebene des beweglichen Fadens B' (Fig. 5) lag auch der feste C'. Jener konnte diesem nur bis auf ein bestimmtes Maß genähert werden, das als Konstante in der Entfernungsberechnung auftritt. Dieser geringste Fadenabstand konnte durch Bewegung der Mikrometer-

schraube um höchstens 5 Schraubenganghöhen vermehrt werden. Setzt man das lineare Maß einer Ganghöhe gleich g, so kann man die Mindestentfernung der beiden Fäden, die bei der Schraubenstellung Null eintritt, durch $m\,g$ und eine beliebige Zusatzentfernung durch $n\,g$ bezeichnen. Entsprechend der in (2) ausgedrückten Beziehung soll jetzt $\frac{f}{g} = \operatorname{ctg} \delta_0 = k_0$ gesetzt werden. Der alte Wert k der Formeln (15) und (16) ist nicht konstant, sondern durch den mit n veränderlichen Wert

$$\frac{f}{g\,(m+n)} = \operatorname{ctg} \delta$$

zu ersetzen. Die abgeänderten Formeln lauten dann für den Fall, daß der feste Faden oben liegt, daß also auf den unteren Punkt U der Latte eingestellt wird:

$$(23) \qquad e = \frac{k_0\,l}{m+n} \cos^2 \alpha \mp l \sin \alpha \cos \alpha + c \cdot \cos \alpha.$$

$$(24) \qquad h = \pm \frac{k_0 \cdot l}{m+n} \sin \alpha \cos \alpha - l \sin^2 \alpha \pm c \cdot \sin \alpha.$$

Ein Vergleich der Formeln (15) und (16) mit diesen läßt sofort erkennen, daß die letzteren ungünstiger sind. Selbst wenn man die letzten Glieder vernachlässigt, so tritt doch an die Stelle der Multiplikation mit der Zahl $k \cdot l$ die Multiplikation mit dem Bruch $\frac{k_0 \cdot l}{m+n}$, dessen Nenner sich zugleich mit n bei jeder neuen Zielweite ändert.

Von den Formeln (15) bis (22), die für Fadendistanzmesser gelten, sind die letzten (21) und (22) die ein-

fachsten; doch aber sind auch sie für ständige Benutzung in der Praxis noch unbequem und erfordern die Verwendung besonderer Rechenhilfsmittel. Solche werden entbehrlich bei Messungen mit Reduktionstachymetern; denn diese liefern Entfernung und Höhe auch aus schrägen Sichten mit dem Faden- bzw. Doppelsicht-Distanzmesser nach den einfachen Formeln (3) und (7).

In allen Rechenformeln für Doppelsicht-Distanzmesser ist $c = o$ zu setzen, wenn das Tachymeter mit einem anallaktischen Fernrohr ausgerüstet ist. Dann ergibt sich e als Produkt von l und k mit einem verkleinernden Funktionswert des Neigungswinkels α. Es ist also $e = k \cdot l \cdot f(\alpha)$. Für horizontale Zielweiten gilt $e = k \cdot l_e$, wenn l_e den Lattenabschnitt bei horizontaler Sicht bezeichnet. Für eine bestimmte Entfernung ergibt sich also:

$$l_e = l \cdot f(\alpha). \tag{25}$$

Soll bei einem Reduktionstachymeter für jede Fernrohrneigung die Formel (3) gelten, so muß auch bei jeder Fernrohrneigung der Lattenabschnitt $l = l_e$ zwischen den Sichten abgeschnitten werden. Der entfernungsmessende Winkel δ muß sich also mit der Fernrohrneigung verkleinern.

Es sind verschiedene Reduktionsvorrichtungen konstruiert und erbaut worden, um die geeignete Verkleinerung von δ zu erzielen. Besonders zu erwähnen sind die italienischen und französischen Konstruktionen, die eine Änderung des Abstandes der Objektivlinsen im anallaktischen Fernrohr mit zunehmender Fernrohrneigung vorsehen. Indessen läßt sich auf diese Art nur eine Längenreduktion innerhalb gewisser Grenzen verhältnismäßig einfach erreichen. Die Instrumente sind em-

pfindlich. Sie haben sich anscheinend nicht bewährt. Von größerer Bedeutung sind die Instrumente, die eine Änderung der Bildmarken für die Lattenpunkte O und U mit zunehmender Fernrohrneigung vorsehen. Sie eignen sich gleich gut für die Längen- und Höhenmessung. Bei den Distanzmessvorrichtungen dieser Instrumente müssen die Bildmarken offenbar einen Abstand gleich der Bildgröße p_e erhalten, der dem Lattenabschnitt l_e entspricht.

Die Lichtstrahlen konvergieren beim anallaktischen Fernrohr gegen K. Ihre Konvergenz ist bedingt durch den Winkel $\delta_\rho = p_\rho : f$, wenn f die äquivalente Brennweite des Objektivsystems bedeutet. Die mathematischen Grundlagen zur Berechnung von p_e werden deshalb ausreichend durch Fig. 7 dargestellt. Bei Verwendung der

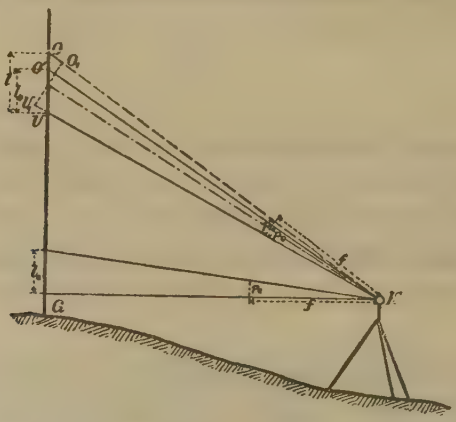


Fig. 7.

gleichen Bildgröße p wachsen die Lattenabschnitte l mit wachsender Fernrohrneigung. Soll überall derselbe Lattenabschnitt l_e an der Latte abgeteilt werden, so muß das zugehörige p_e mit wachsender Fernrohrneigung kleiner

werden. Nun spielt die geringe Verschiedenheit der Entfernungen KO und KU bei der Einstellung des Diaphragmas offenbar gar keine Rolle. Infolge der festen Stellung des Diaphragmas wird auch nicht die wirkliche Entfernung der von den Objektivpunkten O und U entworfenen Bildpunkte o und u, sondern nur die Projektion p der Bildstrecke $o\,u$ senkrecht zur Sehachse MK vom Beobachter erkannt, sodaß nicht OU, sondern $O_1 U_1$ die konjugierte Objektstrecke zur Bildstrecke p vorstellt. Nach den Erörterungen auf S. 35' kann man nun mit völlig ausreichender Annäherung die kurzen Strecken $O_1 O, O_2 O'$ und $U_1 U$ parallel zu MK annehmen und schreiben $l_e : l = O_2 U_1 : O_1 U_1 = p_e : p$. In Rücksicht auf (25) kann man also mit ausreichender Annäherung

$$p_e = p \cdot f(\alpha) \tag{27}$$

setzen. Eine entsprechende Näherungsformel für eine Bildstrecke p_h würde bei einer wesentlich größeren Konstanten als 100, die für die Höhenberechnung zweckmäßig ist, nicht mehr ausreichen.

Das erste Reduktionstachymeter von Tichy und Starke besaß ein Okularschraubenmikrometer etwa in der Art, wie es in Fig. 5 dargestellt ist. Der feste Distanzfaden lag bei demselben dicht neben der Verschiebungsebene des beweglichen. In der Nullstellung wurde letzterer mit ersterem zur Deckung gebracht, sodaß $m = o$ zu setzen war. Ebenso wie bei dem früher beschriebenen Okularschraubenmikrometer waren 5 Trommelumdrehungen zur Verstellung des beweglichen Fadens vorgesehen. Durch dessen äußerste Stellungen war die Konstante $f : 5\,g = 100$ festgelegt. Eine einzelne Schraubenumdrehung entsprach also einer Konstanten $k_0 = f : g = 500$.

Die Konstante k_h für die Höhenermittlung sollte möglichst groß gewählt werden können. Deshalb wurde von Tichy und Starke $k_h = 100 : k'$ gesetzt, wobei k' je nach der Fernrohrneigung gleich 2; 4; 5; 10; 20; 25 oder 50 zu wählen war. Durch Einführung jener Werte folgen aus den Formeln (23) und (24) für anallaktische Bauart des Fernrohrs die nachstehenden:

$$(27) \qquad e = \left\{ \frac{5 \cos^2 \alpha}{n_1} \mp \frac{1}{100} \sin \alpha \cos \alpha \right\} 100\, l_e$$

$$(28) \qquad h = \left\{ \pm \frac{5 \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{n_2}{k'}} - \frac{k'}{100} \sin^2 \alpha \right\} \cdot \frac{100}{k'} \cdot l_h$$

Tichy läßt nun die Klammerausdrücke dadurch gleich der Einheit werden, daß er setzt:

$$(29) \qquad n_1 = 5 \cos^2 \alpha \left(1 \mp \frac{1}{100} \sin \alpha \cos \alpha\right)$$

$$(30) \qquad \frac{n_2}{k'} = 5 \sin \alpha \cos \alpha \left(1 - \frac{k'}{100} \sin^2 \alpha\right)$$

Die Werte n_1 und n_2 können bei dem Reduktionstachymeter von Tichy und Starke am Höhenkreis nach Einstellung des festen Fadens auf α abgelesen und darauf nacheinander an der Mikrometertrommel eingestellt werden. Mit ihrer Einfügung in die Formeln (27) und (28) ergeben sich aus diesen die erwünschten einfacheren (3) und (7)

wenn Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden.

Nach Formel (26) ergibt sich aus (19), worin $f(\alpha) = \cos^2 \alpha$ ist:

$$p_e = p \cdot \cos^2 \alpha. \tag{26*}$$

Die Italiener Roncagli und Urbani haben ein auf einem Glasplättchen dargestelltes Diagramm mit diesen Bildgrößen p_e an Stelle der Distanzfäden verwendet. Das Glasplättchen mußte von Hand verschoben werden. Eine automatische Verschiebung desselben mit zunehmender Fernrohrneigung hat sich nicht bewährt. Die Konstruktion ist bald durch die nachfolgend zu beschreibende Hammer-Fennelsche verdrängt worden, bei welcher die Bildmarken selbst als Bilder durch eine besondere Linse in der Fernrohrbildebene festgelegt werden.

Die Entfernungen der Bildmarken für O und U, d. h. die Bildstrecken p_o bzw. p_h lassen sich unter Benutzung von (14) finden. Da sich beim Hammer-Fennelschen Tachymeter die Einstellungen auf die untere Sicht beziehen, so sollen die Vorzeichen der Gleichung (14) umgestellt werden, damit das obere Vorzeichen sich auf Höhenwinkel, das untere sich auf Tiefenwinkel bezieht. Dann entsteht aus (14), falls $c = o$ ist:

$$\frac{e}{l} = \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg} \delta \mp \sin \alpha \cos \alpha.$$

Weil bei einem Reduktionstachymeter für eine feste Ziel-

weite e auch der Lattenabschnitt l konstant $= l_e$ sein muß, kann man als reduzierte Konstante $e : l = k$ einführen und erhält durch Umformung:

$$\operatorname{ctg} \delta = \frac{k \pm \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Aus den konstanten Werten am Fernrohr ergibt sich $\operatorname{ctg} \delta = f : p_e$. Man erhält somit durch Gleichsetzung der rechten Seiten beider Gleichungen:

(31) $$p_e = \frac{f \cdot \cos^2 \alpha}{k \pm \sin \alpha \cos \alpha}$$

Für die Höhenberechnung folgt aus den beiden Gleichungen (6) und (14):

$$h = l \{ \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} \delta_h \mp \sin^2 \alpha \}$$

Der Faktor von l, d. h. der Klammerausdruck muß bei einem Reduktionstachymeter konstant gleich m werden, sodaß sich ergibt:

$$\operatorname{ctg} \delta_h = \frac{m \pm \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

und, da $\operatorname{ctg} \delta_h = f : p_h$ ist, so folgt:

(32) $$p_h = \frac{f \sin \alpha \cos \alpha}{m \pm \sin^2 \alpha}$$

Ebenso wie für die konstante Horizontalentfernung e der Lattenabschnitt l_e bei beliebigen Höhen konstant ist, so ist auch für die gleiche Höhe h der Lattenabschnitt l_h bei beliebigen Horizontalentfernungen konstant. Beim Hammer-Fennelschen Tachymeter sind die Strecken p_e und p_h in einem auf der Kippachse festsitzenden Diagramm dargestellt. Die einem bestimmten Höhenwinkel zugeordneten Werte p werden durch die Kippbewegung des Fernrohrs selbsttätig ausgewählt und in der Bildebene neben dem Lattenbild abgebildet, wie es in Fig. 8 angedeutet ist. In derselben bezeichnet CC den festen Horizontalfaden. Die linke Hälfte des Gesichtsfeldes wird von einem Prisma P_2 eingenommen, das zur Abbildung des Diagramms beiträgt. Im Diagrammbild befindet sich ein „Grundkreis" G, der bei der Fernrohrkippung ständig CC berührt und von dem aus die Bilderstrecken p_e und p_h bemessen sind. E' ist die Entfernungs-, H' ist die Höhenkurve. Die Bildstrecken p_e und p_h, die der gerade vorliegenden Fernrohrneigung entsprechen, werden gerade längs der Prismenkante J-J von G aus bis E' bzw. bis H' abgeschnitten. Neben diesen Bildstrecken kann das Lattenbild eingestellt werden, an dem l_e und l_h abgelesen werden. Die weiteren Einrichtungen des Instrumentes werden im nächsten Abschnitt beschrieben werden.

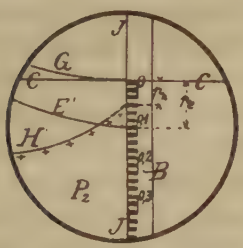


Fig. 8.

Mehrfach sind Kipp- und Fadendistanzmesser an demselben Instrument vereinigt worden. Gewöhnlich be-

stehen beide nebeneinander zur gegenseitigen Probe. Bei einem neueren Tachymeter nach Laska-Rost (Zeitschrift f. Instrumentenkde. 1905 S. 225), ist indessen der Kippdistanzmesser vornehmlich zur Längenmessung, der Fadendistanzmesser mit beweglichem Faden an einem Okularfadenmikrometer vornehmlich zur Höhenmessung bestimmt. Der bewegliche Faden wird nach einem am Höhenkreis abzulesenden Trommelwert eingestellt. Die Differenz l_h zwischen der zugehörigen Lattenablesung und der mit dem festen Faden vor der Fernrohrkippung gewonnenen wird mit der Konstanten der Kippmessung, d. h. mit 100 multipliziert Das Produkt, also 100 l_h ergibt den Höhenunterschied h. Die Konstante 100 ist nun für die vorliegenden Zwecke offenbar zu groß, da ein kleiner Messungsfehler von 1 mm schon einen Höhenfehler von 1 dcm im Gefolge hat Die angebrachte Höhenkreisteilung hat aber, nach der bezeichneten Abhandlung zu urteilen, nur für die Konstante 100 Gültigkeit und kann nicht auf einfache Weise während der Messung für eine kleinere Kanstante umgerechnet werden. Daher kann das Tachymeter von Laska-Rost hier übergangen werden. Unberücksichtigt bleiben kann ferner der Vielmesser von Jähns (Deutsche Bauztg. 1875 S. 92), weil dessen Vorrichtung zur Entfernungs- und Höhenmessung eine vom Kipp- und Fadendistanzmesser abweichende Konstruktion hat und wohl kaum solche Messungsgenauigkeit wie jene ermöglicht.

Bisher wurde nur die tachymetrische Entfernungs- und Höhenmessung für lotrechte Lattenstellung behandelt. Vielfach werden nun noch Instrumente für schiefe Lattenstellung senkrecht zur Sicht verwendet. Besonders das Wagner-Fennelsche Tachymeter macht von der schiefen Lattenstellung Gebrauch. Man ist nun in der Messungspraxis immer mehr von der schiefen Lattenstellung abgekommen, weil sie sich auf steilem Gelände

kaum durchführen läßt und auch auf flachem Gelände ungeübten Leuten mehr Schwierigkeiten bereitet als die lotrechte Lattenstellung. Außerdem macht sie immer dann besondere Rechnungen nötig, wenn die Lattenabschnitte nicht sämtlich von demselben Lattenpunkt *U* (oder *O*) aus beobachtet sind. Im Gebüsch ist aber nicht selten die Sicht nach einer bestimmten Lattenmarke *U* (oder *O*) verdeckt. Die selbstreduzierenden Tachymeter sind wohl hauptsächlich zur Vermeidung solcher Nebenrechnungen für lotrechte Sichten eingerichtet. Im folgenden soll auch vornehmlich die lotrechte Lattenstellung berücksichtigt werden. Indessen ist ein Hinweis nicht zu umgehen auf die französischen Bestrebungen, die wagerechte Lattenstellung einzuführen. Bei lotrechter und schiefer Lattenstellung wird die Genauigkeit der Messung sehr ungünstig durch die Refraktion und durch die Aufstellungsfehler der Latte beeinflußt. Die Sorgfalt des Beobachters ist vergeblich und die Güte des Fernrohrs nützt nichts gegenüber jenen schädlichen Einflüssen. Wird aber die Latte wagerecht gehalten, so werden die Ablesungen an Vertikalfäden nur durch die Seitenrefraktion ungünstig beeinflußt und diese ist unmerklich gegenüber der Höhenrefraktion. Auch die Aufstellungsfehler der Latte kommen nicht mehr in Betracht. Allein durch wagerechte Lattenhaltung läßt sich also eine größere Genauigkeit der Längenmessung und wohl auch der Höhenmessung bei der gewöhnlichen Tachymetrie erzielen, bei deren praktischer Anwendung ungünstige Luftverhältnisse nicht vermieden werden können. Zuerst haben die französischen Offiziere Peaucellier und Wagner, nach ihnen hat Goulier die wagerechte Lattenhaltung für Distanzmesser mit zwei vertikalen Distanzfäden eingeführt. Ferner hat der französische Landmesser Sanguet ein Tachymeter zur Längen- und Höhenmessung mit horizontaler Latte konstruiert. Die Latte wird in jedem Falle senkrecht zur Sicht ge-

halten. Bei dem Sanguetschen „longi-altimètre“ wird zur Längenmessung um eine lotrechte, zur Höhenmessung um eine horizontale, die Latte rechtwinklig kreuzende Achse gekippt, sodaß, wie ohne weiteres erklärlich, Länge und Höhe nach den einfachen Formeln (3) und (7) berechnet werden können. Wir werden im letzten Abschnitt auf die wagerechte Lattenhaltung zurückkommen.

Abschnitt II.

Übersicht über Konstruktion und Gebrauch einiger Tachymeter.

Nach dem vorigen Abschnitt hat man hauptsächlich zwischen Kipp- und Doppelsicht-Distanzmessern zu unterscheiden. Von der letzteren Gruppe wird zweckmäßig noch die Untergruppe der Reduktionstachymeter abgeteilt. In Deutschland haben von diesen Reduktionstachymetern für lotrechte Lattenstellung nur das Puller-Breithauptsche und das Hammer-Fennelsche Bedeutung gewonnen. Besonders das letztere soll näher betrachtet werden. Von den Fadendistanzmessern wollen wir nur das einfache Kreistachymeter oder den tachymetrischen Theodoliten mit festen Fäden eingehender behandeln. Er hat weitaus die meiste Verbreitung erlangt, hauptsächlich wohl deshalb, weil seine Benutzung als Theodolit zu Winkelmessungen und Ablotungen nicht im geringsten durch die eigentliche tachymetrische Einrichtung, d. h. durch die Distanz- und Höhenmeßvorrichtung, behindert wird. Um

nun die auf S. 11 angedeutete Doppeleinteilung durchzuführen, wollen wir ein Kipptachymeter ausführlicher behandeln, das zugleich als Nivellierinstrument für mittelfeine Nivellements empfehlenswert ist, nämlich das Voglersche Gefälltachymeter. Wie das Kreistachymeter zugleich Theodolit, so ist das Gefälltachymeter zugleich vollgültiges Nivellierinstrument. Es eignet sich besonders zu Aufnahmen in flachem Gelände, besonders also zu Wasserbauvorarbeiten, zu denen ohnehin ein Nivellierinstrument häufiger gebraucht wird als ein Theodolit. Die beigefügten Instrumentenskizzen sollen Seitenansichten der Instrumente andeuten. In allen bezeichnet H den Horizontalkreis zur Richtungsbestimmung, A die Stehachse, K die Kippachse des Fernrohrs, S die Sehachse, L die Libellenachse. Bei der Aufstellung eines Instrumentes wird A lotrecht gestellt. K soll bei allen Instrumenten senkrecht zu A, S soll senkrecht zu K stehen.

A. Kipptachymeter.

Das Gefällschraubentachymeter nach Vogler hat den Oberbau eines Nivellierinstrumentes, wie in Fig. 9 angedeutet ist. Die Tangentenkippschraube oder Gefällschraube ist mit T bezeichnet. Die Libellenachse L soll der Sicht S parallel sein. Der Parallelismus wird ebenso wie beim entsprechend gebauten Nivellierinstrument erzeugt. Das Fernrohr besitzt etwa 28fache Vergrößerung, die Libelle eine Angabe von etwa 20". Die Kippvorrichtung (Fig. 3) erlaubt Sichten zu nehmen, die bis zur Neigung 1 : 10 steigen oder fallen. Bei der geringen Größe dieser Neigungen kann, wie eine einfache Betrachtung lehrt, der kleine Abstand b zwischen K und S völlig vernachlässigt werden. Die Sehachse S kann man sich also durch K gelegt denken. Sie

erhält dann, wie in Fig. 1 dargestellt, die Lagen *o K O* oder *u K U*, bezw. *w K H*. Entfernung und Höhe können also sehr einfach nach den Formeln (3) und (8) oder

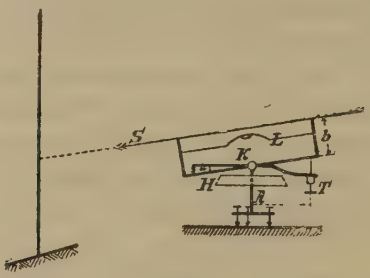


Fig. 9.

weniger einfach nach (11) und (12) berechnet werden. Verf. hat das Voglersche Gefälltachymeter vor einigen Jahren zu Vorarbeiten für Stadterweiterungspläne und Hafenbauten im Warthe-Flußtal verwandt und möchte im Abschnitt IV die dabei erzielten Genauigkeitsergebnisse herleiten. Das Instrument erwies sich als sehr geeignet für die bezeichneten Zwecke. Es wurde von Herrn Geh.-Rat Vogler aus der Sammlung der landwirtschaftlichen Hochschule zur Verfügung gestellt, wofür Verfasser hierdurch nochmals gebührenden Dank aussprechen möchte. Die Arbeitsweise wurde gegenüber dem Voglerschen Verfahren in einigen Punkten abgeändert. Bei der Feldbuchführung wurden anfangs dekadische Ergänzungen, später jedoch natürliche Zahlen benutzt, um die Rechenarbeit Hilfskräften übergeben zu können, die dekadische Ergänzungen nicht kannten. Sowohl der sicheren Beobachtung wie der bequemeren Rechnung wegen erschien

es vorteilhaft, zuerst alle Wechselpunkte und zwar die der Rückblicke wie die der Vorblicke, ferner auch die Richtungsanschlüsse zu bestimmen und erst dann zu den Geländepunkten überzugehen Das Instrument bleibt bei tachymetrischen Beobachtungen oft stundenlang auf demselben Standpunkt stehen. Infolge äußerer Einflüsse treten dann oft Schwankungen der Stehachse und damit auch solche der Sehachse ein. Soweit dieselben nur klein und an der Dosenlibelle kaum erkennbar sind, schaden sie bei geringen Fernrohrneigungen der Einmessung der Geländepunkte gewöhnlich nicht, wie später nachgewiesen werden soll, wohl aber der Bestimmung der Wechselpunkte. Die Schwankungen der Stehachse werden verursacht durch Wind, durch Sonnenbestrahlung der Stativfüße, Nachgibigkeit des Bodens usw. Mögen diese äußeren Einflüsse nun plötzlich auftreten oder andauern, sie werden doch, da im allgemeinen ihre Richtung bestehen bleibt, eine umso größere Wirkung ausüben, je länger sie anhalten. Es ist daher zweckmäßig, die Wechselpunkte, die genauer bestimmt werden müssen, gleich zu Anfang im Anschluß an die genaue Aufstellung und auch schnell hintereinander zu beobachten. Man kann auf diese Weise offenbar schneller arbeiten, weil man zur Bestimmung der Wechselpunkte die Einstellschrauben zur Lotrechtstellung der Stehachse und selbst auch die Gefällschraube nicht so oft zu verstellen braucht; denn die Geländepunkte können, auch wenn schon geringe Stehachsenverstellungen eingetreten sind, im allgemeinen noch längere Zeit hindurch ohne Nachstellung der Schrauben bestimmt werden. Man kann ferner für viele Geländepunkte Centimeterablesungen einführen und dadurch wesentliche Zeitersparnisse erzielen. Der dabei erreichbare Genauigkeitsgrad soll weiter unten bestimmt werden.

Im Felde ist nur die Höhenberechnung der Wechselpunkte durchgeführt worden und zwar einschließlich der

Proben. Die Berechnung der Geländepunkte ist einer Hilfskraft übertragen worden. Mit Rücksicht auf die Techniker, die wohl das gewöhnliche Nivellement, nicht aber auch die Tachymetrie kennen, ist schließlich das Voglersche Formular in das nachstehende abgeändert worden:

Tafel 1. Feldbuch für die Messung mit dem Gefälltachymeter.

Ziel	Zeiger (Hilfszeiger) o '	o	O	U	O $U = l$	$m = 10 - o$	$m \cdot l$ +	$m \cdot l$ —	Rückblick $O + m\,l = H$ +	Rückblick $O + m\,l = H$ —	Steigung Höhe	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
					Standpunkt ⊙ IX							
⊙VIII	200 25 (218 17)											
w_7		10	1,703	0,950	0,75'3	0	—	—	1,703	—	13,003	
w'_7		10	1,916	1,425	0,49'1	0	—	—	1,916	—	— 0,213 12,790	vorher 12,788
⊙ X	356 14 (14 8)										12,789	Mittel
w_8		10	1,144	0,880	0,26'4	0	—	—	1,144	—	+ 0,772 13,561	
w'_8		9	0,352	0,412	0,44'0	+ 1	0,440		1,292	—	— 0,148 13,413	
	Probe		5,615	3,667	1,948		0,440		6,055 (— 1)			
40	144 — (162 —)	10	2,87	2,47	0,40'	0	—	-	0,411 2,87		— 1,58 11,83	
41	125 — (143 —)	9	2,68	2,28	0,40'	+ 1	0,40	—	3,08		— 0,21 11,62	
42	309 40 (327 30)	14	2,38	1,73	0,65'	4		2,60		0,22	+ 3,30 14,92	
	Probe		(7,93)	(6,48)	(1,45)	—	(0,40)	(2,60) (2,20)	(5,95) (5,73) (1,51)	(0,22)		

Die Spalten 1—5 nehmen die Beobachtungsgrößen auf; sie werden also durchgehends im Felde ausgefüllt. Von den Messungsproben sind nur die zur Prüfung der Richtung am „Hilfszeiger" geschätzten Gradmaße niedergeschrieben worden, nicht aber die Probeablesungen nach dekadischen Ergänzungen an der Latte. Letztere sind übrigens bei Centimeterablesungen aufgegeben worden. Sie ermüden leicht, machen also den Beobachter unsicher und schützen bekanntlich doch nicht ausreichend gegen grobe Fehler. Verf. zieht es deshalb vor, nach der eigentlichen Ablesung, die im wesentlichen aus einem Abzählen der Dezimeter und Centimeter besteht, noch eine Abschätzung vorzunehmen innerhalb des ganzen, im Fernrohr sichtbaren Lattenbildes. Allgemeine Regeln lassen sich für die Sicherung gegen grobe Beobachtungsfehler indessen nicht aufstellen, da hierbei das subjektive Empfinden des Beobachters eine große Rolle spielt.

Die Formularspalten 6—12 dienen ihrer Überschrift entsprechend der Berechnung der Höhen. Die jedesmalige „Steigung" wird aus dem Unterschied zweier aufeinanderfolgender „Rückblicke" H gebildet und wie beim gewöhnlichen Nivellement zur vorhergehenden Höhe addiert, um die folgende zu liefern. Die Rechenproben werden für jeden Standpunkt gesondert durchgeführt. Es ist $\Sigma O - \Sigma U = \Sigma(O-U)$. Zur ΣO wird die algebraische Summe der Spalten 8 und 9 hinzugefügt. Das Ergebnis muß mit der algebraischen Summe der Spalten 10 und 11 übereinstimmen. Endlich wird in bekannter Weise der Unterschied des ersten und letzten Rückblicks, d. h. die Gesamtsteigung, aus Spalte 10 u. 11 zur Anfangshöhe hinzugefügt und mit der Endhöhe auf Übereinstimmung verglichen. Ungeprüft bleiben dabei nur die Größen $m\,l$. Ganz entsprechend wird die Berechnung der Geländehöhen geprüft, wobei die Endhöhe nicht mit der des ersten Geländepunktes, sondern mit der eines Wechselpunktes zu ver-

gleichen ist. Die Zielweiten werden nach einer Kommaversetzung aus Spalte 5 entnommen. Es bildet dann, sobald die Koordinaten der Instrumentenstandpunkte in bekannter Weise berechnet und in die Karte eingetragen sind, das vorstehende Formular allein eine ausreichende und Technikern leicht verständliche Unterlage für die Kartierung der Geländepunkte. Selbstverständlich muß außerdem die Verbindung der Geländepunkte zu Geländekanten im besonderen Feldbuch dargestellt sein.

Das Voglersche Gefälltachymeter läßt nur geringe Neigungen zu. Bei Kipptachymetern mit theodolitartigem Oberbau lassen sich auch große Neigungen herstellen. Solche Instrumente sind in den verschiedensten Ausführungsformen gebaut worden. Hier genügt die Aufzählung einiger derselben.

Der Tacheograph von v. Ziegler und Hager in Luxemburg benutzt zwei gegeneinander wirkende Gefällschrauben, die vor K — d. h. zwischen K und H in Fig. 1 — angebracht sind. Die Längen- und Höhenmessung entspricht also der mit dem Voglerschen Gefälltachymeter auszuführenden.

Das ältere Tachymeter des französischen Landmessers Sanguet läßt Kippbewegungen des Fernrohrs nach einer besonderen Einrichtung mit derartiger Begrenzung durch Kontakte zu, daß für beliebige Fernrohrneigungen α die Funktion $1 : \triangle tg\,\alpha = k$ wird. Dabei läßt sich $tg\ \alpha$ allerdings nur an einer Skala mit Nonius auf 5 Einheiten der 4. Dezimalstelle ablesen. Während die Längenbestimmung einfach und ausreichend genau vorgenommen werden kann, dürften für die Höhenmessung wohl Vorrichtungen zur genaueren Festlegung der Fernrohrneigung erwünscht sein.

Die beiden vorbezeichneten Instrumente gestatten weder ein Durchschlagen noch ein Durchlegen des Fernrohrs und können daher einen Theodoliten zu Winkel-

messungen nicht ersetzen. Zur Verwendung für Nivellements müßten sie mit einer Fernrohrlibelle versehen werden. Am meisten wird der theodolitartige Oberbau erhalten bei einer Konstruktion nach Fig. 10. Der an S festklemmbare Feinstellarm B für die Höhenänderung des Fernrohrs besitzt eine ebene, durch K gehende Gleitfläche, an welcher die Spitze der Tangentenkippschraube T angreift. Das Fernrohr erhält dann eine aufgesetzte Libelle. Solch ein Kipptachymeter-Theodolit läßt sich mithin zu Nivellements verwenden, wenn auch weniger vorteilhaft als das Voglersche Gefälltachymeter. Für die Ausbildung der Kippvorrichtung hat Dörgens (Centralbl. d. Bauverwltg. 1900) Vorschläge gemacht, die eine schnelle und genaue Begrenzung der einzelnen Kipplagen auch bei größeren Fernrohrneigungen erstreben. Die Konstruktion ist aber wohl nicht ausgeführt worden.

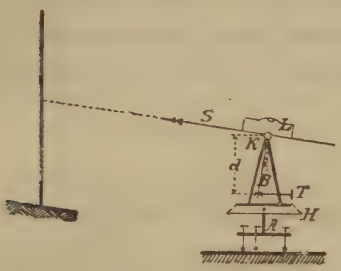


Fig. 10.

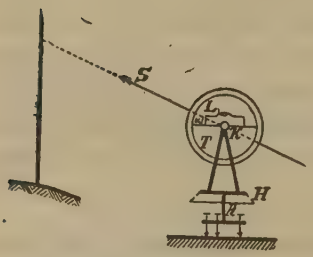
Dasselbe Ziel wird, wenigstens bis zu Neigungen von etwa 18°, bei dem in England und in den englischen Kolonien besonders viel verwendeten Eckholdschen Omnimeter durch eine horizontale Tangentenskala und Mikroskopeinstellung auf dieselbe erreicht. Das Objektiv des Mikroskops muß aber bei jeder Neigungsänderung verstellt werden. Dadurch wird der Messungsvorgang unbequem. Das Instrument dürfte auch für einfache Nivellements und Winkelmessungen schon recht schwerfällig sein.

Zu den Tachymeterkonstruktionen mit Kippvorrichtung müssen auch noch diejenigen gerechnet werden, die sich

eines Höhenkreises mit Tangententeilung bedienen. Auch dann kann das Fernrohr auf Neigungen eingestellt werden, deren Tangentenwerte gleichmäßig wachsen. Daher ist auch $1 : \Delta \operatorname{tg} \alpha = k$. Eine derartige Konstruktion ist in der englischen Patentschrift Nr. 25 267 v. J. 1898 als Erfindung des kanadischen Ingenieurs Fergusson beschrieben. Indessen findet sich keine Mitteilung über die Ausführung der Konstruktion.

B. Faden- oder Doppelsichttachymeter.

Ein Theodolit (Fig. 11), dem 2 Distanzfäden im Diaphragma, ein Höhenkreis T und eine Röhrenlibelle L beigegeben sind, kann für alle hier in Betracht kommenden Zwecke der Tachymetrie benutzt werden. Seine Eigenschaften als Theodolit werden durch jene Beigaben nicht benachteiligt. Um dem Beobachter einen schnellen Messungsfortschritt zu ermöglichen, werden für die Kreisablesungen statt der Nonien bisweilen nur Indexstriche angebracht. Am besten dürften die Fennelschen Strichmikroskope den Forderungen der Tachymetrie gerecht werden. Sollen bei lotrechter Stehachse richtige Höhenwinkel bezw. Zenitdistanzen am Höhenkreis abgelesen werden, so müssen die Zeiger solche Lage haben, daß bei horizontaler Sicht die Ablesungen 0^0 bezw. 90^0 erscheinen. Die dazu nötigen Justiervorrichtungen können hier übergangen werden. Es ist aber für die Leistungsfähigkeit eines Tachymeters von Bedeutung, ob und in welcher Weise jene Forderung auch bei den unvermeidlichen Stehachsen-



Figur 11.

schwankungen erreicht werden kann. Die verschiedenen diesbezüglichen Einrichtungen werden im nächsten Abschnitt aufgeführt und verglichen werden.

Zur Ermittlung von Entfernung und Höhe gelten für genaue Rechnung die Formeln (19) und (20), für bequemere Näherungsrechnung die Formeln (21) und (22) des vorigen Abschnittes (S. 35), falls, wie gewöhnlich, die Höhenwinkel vom Mittelfaden aus gezählt werden.

Bei der Messung mit Kipptachymetern erscheint es, wie oben beschrieben, vorteilhaft, der Sehachse bestimmte Neigungen zu geben, also O und U in unrunden Zahlen an der Latte abzulesen, um m in Formel 8 des 1. Abschnittes als runde Zahl einführen zu können. Beim Kreistachymeter muß man von vornherein auf einfache Ausrechnung von h verzichten. Man hat also keinen Grund, bestimmte Fernrohrneigungen anzuwenden, wählt aber dafür U als runde Zahl, um die Differenz $O-U=l$ schneller bilden zu können. Ferner wählt man nach Möglichkeit die Ablesung M am Mittelfaden, also das Maß GM (Fig. 2), für alle Punkte in gleicher Lattenhöhe, (am besten gleich der Aufstellungshöhe des Instruments). Dadurch erhält man einen weiteren Rechenvorteil, weil man die gedachten Lattenablesungen H nicht zu bilden, d. h. die Strecken GH nicht zu rechnen braucht; denn die gesuchten Höhenunterschiede verschiedener Punkte $H_1 - H_2$ oder $G_1 H_1 - G_2 H_2$ finden sich bereits aus $h_1 - h_2$.

Hammer will noch einen weiteren Vorteil bei der Messung erreichen, indem er den Oberfaden stets auf dieselbe feste Lattenmarke U einstellt, von welcher aus die Latte beziffert ist. Er kann dann $O-U=l$ sofort ablesen und erspart das Aufschreiben der Feldbuchzahl U. (Ztschrft. f. Vermessungsw. 1905 S. 721.) Die Differenz $M-U$ beträgt an seiner Latte 80 cm. Demnach werden

aber offenbar nur bei Lattenabschnitten $l = 2 \cdot 0{,}8 = 1{,}6$ m die Bilder von M und U zugleich den Mittel- und Oberfaden treffen. Bei größeren und kleineren Lattenabschnitten muß das Fernrohr zwischen den Einstellungen auf U und M verstellt werden. Dadurch entstehen Fehler, die bei Lattenabschnitten von 3,50 und 0,30 m selbst 1 cm übersteigen, also durch nachträgliche Verbesserungen von l fast immer berücksichtigt werden müssen. Demnach dürften für Kreistachymeter, deren Höhenwinkel sich auf die Mittelvisur beziehen, feste Nullmarken für U (oder O) von zweifelhaftem Werte sein.

Das Verfahren von Vogler liefert dagegen ausreichend genaue Werte für l und gibt noch bequeme Messungsproben ab. Man richtet die Sicht zuerst angenähert auf M, z. B. auf 1,4 m, stellt dann den unteren Faden auf die nächstgelegene runde Dezimetergrenze O_1 und liest U_1 ab. Darauf stellt man entsprechend den oberen Faden auf die nächste Dezimetergrenze U_2 und liest O_2 ab. Schließlich richtet man den Mittelfaden genau auf M und liest am Höhenkreis ab. Die Kreisablesungen prüft man durch Schätzungen an einem bestimmten Indexstrich, dem Hilfszeiger. Das folgende Formular nach Vogler enthält für die Anschlußpunkte derartige Eintragungen. Für die Geländepunkte sind aus den auf S. 51 angegebenen Gründen nur Centimeterablesungen ohne Proben aufgeführt. Vogler empfiehlt, den Höhenkreis nach Zenitdistanzen zu beziffern, weil dadurch Vorzeichenfehler ausgeschlossen werden. Der für die nachstehend aufgeführten Ablesungen verwendete Höhenkreis war indessen — entgegen jenem sehr zweckmäßigen Vorschlag — nach Höhenwinkeln beziffert. Die Berechnung der Spalten 8 und 9 geschieht nach den Formeln (21) und (22). Spalte 10 wird ganz wie Spalte 12 des Formulars auf S. 50 berechnet und geprüft, wenn, wie es Vogler empfiehlt, h mit umgekehrtem Vorzeichen, also von M aus nach H zählend,

in Spalte 9 eingetragen wird. Dementsprechend sind auch in Spalte 6 die Höhenwinkel nach unten positiv, nach oben negativ eingetragen.

Tafel 2. Feldbuch für die Messung mit dem Kreistachymeter.

Ziel	M	O_1 O_2	U_1 U_2	O_1-U_1 O_2-U_2	Negativer Höhenwinkel $-\alpha$ ° '	Richtung ° '	Entfernung e	Negativer Höhenunterschied $-h$	Steigung Höhe	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
				Standpunkt B						$k = 100{,}5$ $c = 0{,}42$
⊙A						68 15 (81 54)				
Bolzen 124	1,400	1,600 1,643	1,258 1,300	0,342 0,343	+ 2 16 (— 12 44)			+ 1,38	207,14	Konstante d. Hilfszeigers am Horizontalkreis 13° 40', am Höhenkreis 15° 1'
w_1	1,400	1,700 1,712	1,088 1,100	0,612 0,612	+ 0 53 (— 14 05)		61,9	+ 0,96	0,42 207,56	
w_1'	1,400	1,800 1,767	1,035 1,000	0,765 0,767	+ 1 08 (— 13 50)		77,4	+ 1,53	— 0,57 206,99	
⊙I						262 27 (276 06)		- 0,15		
62	1,400	1,53	1,30	0,23	+ 3 45 (— 11 15)	102 30 (116 10)	23,4	+ 1,52	+ 0,01 207,00	
63	1,400	1,68	1,10	0,58	— 4 28 (— 19 29)	115 15 (128 55)	58,4	— 4,57	+ 6,09 213,09	
								(+ 6,10)		

Auch bei dem Voglerschen Messungsverfahren kommen geringe fehlerhafte Neigungsänderungen zwischen den Einstellungen M, O_1 und U_2 vor. Sie sind offenbar um so größer, je kleiner e ist und sie sind um so einflußreicher auf den Fehler in l, je größer α ist. Rechnungsmäßig ergibt sich für $e = 30$ m und $\alpha = 30^0$ ein Unterschied von 1,1 mm für die beiden Differenzen $O_1 - U_1$ und $O_2 - U_2$, wenn die Differenz zwischen O_1 und O_2 ein volles Dezimeter beträgt. Auch der geringe Fehlerbetrag von 1 mm, der nur ganz ausnahmsweise vorkommen kann, ist zu vernachlässigen.

Ein Übelstand bei der Verwendung des Kreistachymeters liegt in der Unbequemlichkeit, die die Ausrechnung von e und h selbst nach den Formeln (21) und (22) noch verursacht. Ihre Anwendung veranlaßt an sich nur geringe Fehler. Es wird z. B. für $c = 0{,}5$ und $\alpha = 30^0$ der Längenfehler $\triangle e = 6$ cm und der Höhenfehler $\triangle h = 3$ cm. Größer sind im allgemeinen die bei Benutzung von Rechenhilfsmitteln zu befürchtenden Fehler. Die Jordanschen Tafeln lassen z. B. ohne Interpolation, wie sie vielfach benutzt werden, für e Fehler von 50 cm und für h Fehler von 5 cm bereits bei geringen Neigungen zu. Bei größeren Neigungen vergrößern sich die Höhenfehler noch wesentlich. Will man diese Fehler nicht in Kauf nehmen, so ist man auf unbequeme Interpolation angewiesen. Rechenschieber und Diagramme lassen wegen ihrer ungleichmäßigen Teilung stellenweise keine sichere Interpolation zu. Als besonders genau wird der Tachymeterschieber von Puller-Breithaupt hingestellt. Bei Rechenversuchen haben sich die Entfernungen auf dm genau, die Höhen mit einem mittleren Fehler von $\pm$ 1,8 cm ergeben. (Ztschrft. f. Vermessungsw. 1897. S. 363.) Gegenüber dem Kreistachymeter besitzt also das Gefälltachymeter den Vorzug, e und h nach einfacherer und zugleich genauerer Rechnung zu liefern.

Zur Beurteilung des Messungsfortschritts gibt Helmert an, in einer Stunde bei Verwendung eines Lattenträgers 20—35 Punkte aufgenommen zu haben. Jordan führt an, daß er häufig 2—3 Lattenträger habe beschäftigen können.

Bei der sog. Präzisionstachymetrie will man auch für Katasterzwecke die Polygonseiten mit dem Fadendistanzmesser messen. Man braucht dann zur Koordinatenberechnung die Logarithmen der Strecken. Für diesen Fall hat der österreichische Oberförster Tichy außer zur Vereinfachung der Rechnung auch zugleich zur Erhöhung der Ablesungsgenauigkeit die logarithmische Lattenteilung eingeführt. Für die Darstellung der Geländeaufnahme werden indessen die natürlichen Zahlen der Strecken, nicht deren Logarithmen gebraucht. Wir können also hier die logarithmische Lattenteilung übergehen und werden später darauf zurückkommen, wie Tichy die Geländeaufnahme ausgeführt wissen will.

Für ganz flaches Gelände hat Vogler Nivellierinstrumente mit Horizontalkreis und Distanzfäden ausrüsten lassen als „Nivelliertachymeter". Die Höhen müssen durch geometrisches Nivellement bestimmt werden. Da das Instrument demnach nur für ganz flaches Gelände, also etwa in Moorgegenden und im Mündungsgebiet von Flüssen mit Vorteil verwendbar ist und dort etwa dieselbe Leistungsfähigkeit wie das Gefälltachymeter besitzt, so mag es hier übergangen werden.

C. Reduktionstachymeter.

In Anlehnung an die für schiefe Lattenstellung durchgebildeten Schiebetachymeter - Konstruktionen von Kiefer, Kreuter und Wagner sind i. J. 1901 und 1903 zwei ver-

schiedene Schiebetachymeter von Puller und Breithaupt für lotrechte Lattenstellung ausgeführt worden. (Ztschrft. f. Vermessungsw. 1901. S. 531 und 1903 S. 649.) Beide dienen zur örtlichen mechanischen Ausmittlung von e und h und übertreffen die oben bezeichneten älteren Konstruktionen dadurch, daß sie unmittelbar zugleich sowohl zur sog. Zahlentachymetrie wie auch zur zeichnerischen Darstellung der Ergebnisse, also zur Meßtischtachymetrie verwandt werden können. Die Darstellung geschieht nicht mehr nach dem alten Meßtischverfahren, sondern stationsweise getrennt, wie es vorher bereits für den Homolographen von Peaucellier und Wagner und für den Tacheographen von v. Ziegler und Hager vorgesehen war. Zur mechanischen Berechnung von e und h wird die Fernrohrneigung während der Einstellung benutzt. Man stellt zuerst l an einer Skala ein. Diese Länge l wird dann entsprechend den Formeln (17) und (18) des ersten Abschnitts zugleich auf e und h an zwei Skalen reduziert. Die Ergebnisse können abgelesen, e kann auch sogleich mittels Zeichennadel in richtiger Orientierung an einem Alhidadenlineal abgesteckt werden. Der Nullpunkt aller aufgetragenen Längen liegt in der Stehachse. Es können also gegebenenfalls im Felde die Horizontalkurven ermittelt und mit der Örtlichkeit sogleich verglichen werden. Wird die Feldarbeit durch die Ausrechnung ein wenig verzögert, so wird doch durch den Fortfall der Schreibarbeit noch viel mehr Zeit erspart, so daß erstaunliche Leistungen von 100—140 Punkteinmessungen und Auftragungen in der Stunde erzielt worden sind. Bei normaler Arbeitszeit im September konnten einschl. aller Nebenarbeiten 400 bis 500 Punkte täglich aufgenommen werden. (Ztschrft. f. Vermessungsw. 1903. S. 408.) Beide Instrumente sind nur für die Zwecke der Tachymetrie eingerichtet, einen Theodoliten oder ein Nivellierinstrument können sie schon ihrer Unhandlichkeit wegen nicht ersetzen.

Bei den Schiebetachymetern wird die Ermittlung von e und h nur durch besondere Einstellung an den Schiebegliedern ermöglicht. Das Tichy-Starkesche Reduktionstachymeter (S. 39) liefert die reduzierten Lattenabschnitte erst, nachdem sein Okularfadenmikrometer einer Höhenkreisablesung entsprechend eingestellt ist. Demgegenüber liefern nun die selbsttätigen Reduktionstachymeter unmittelbar die Ablesung der reduzierten Lattenabschnitte $l_e = e : k$ und $l_h = h : m$ (vgl. S. 37 u. f.).

Von den selbsttätigen Reduktionsvorrichtungen hat nur die Konstruktion von Hammer und Fennel in der Praxis Bedeutung erlangen können. Bei ihr sind p_e und p_h nach den Formeln (31) und (32) des I. Abschnitts (S. 42) als radiale Strecken GE' und GH' (Fig. 12) von einem durch G gelegten Kreisbogen aus aufgetragen. Das entstandene Diagramm D ist so auf die Kippachse K fest aufgesetzt, daß der Kreisbogenmittelpunkt in K liegt. Das Fernrohr lagert exzentrisch und enthält ein in Fig. 13 angedeutetes Prismen-Linsensystem $P_1\ Q\ P_2$. Durch dieses wird je nach der jedesmaligen Fernrohrneigung immer ein Teil des Diagramms in die Fernrohrbildebene bei J als reelles Bild projeciert und zwar so, daß durch die scharfe Prismenkante bei J gerade diejenigen Bildstrecken p_e und p_h abgeschnitten werden, die der betreffenden Fernrohrneigung entsprechen. Dicht neben J wird das durch das Objektivsystem des Porroschen Fernrohrs entworfene Lattenbild eingestellt und zwar so, daß der

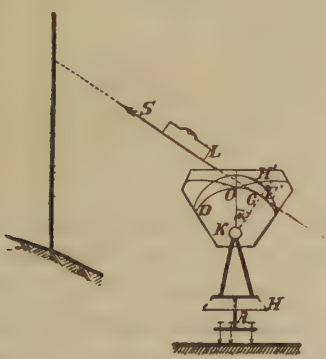


Fig. 12.

Lattennullpunkt U von dem Bild des Grundkreises G getroffen wird. Man kann also von G aus bis E' den Lattenabschnitt l_e und bis H' den Lattenabschnitt l_h unmittelbar ablesen. Da das Fernrohr mit dem Grundkreis G auf den Lattennullpunkt gestellt ist, so brauchen nur die beiden Ablesungen bei E' und H' entnommen und als l_e und l_h in die einfachen Formeln (3) und (7) eingesetzt zu werden. Für k hat Hammer 100, für m dagegen 20 gewählt.

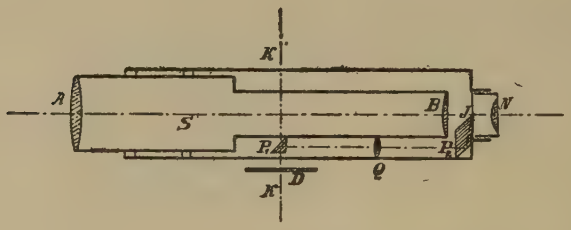


Fig. 13.

Der Fernrohrbeobachter kann etwa das nebenstehende Formular (Tafel 3) verwenden. In der Ausfüllung gelten die Richtungen für neue Kreisteilung. Die Ablesungen l_e und l_h vom Nullpunkt bis zur Entfernungs- und Höhenkurve sind die einzigen notwendigen Lattenmaße. Nur um eine Probe gegen grobe Ablesefehler zu haben, ist noch die Differenz $l_e - l_h$ geschätzt nach einer geringen Höhenverstellung des Fernrohrs auf das nächste runde Maß l_e oder l_h. Eine Spalte für die Entfernungen ist überflüssig, wenn die große Konstante k auf 100 abgestimmt ist. Eine Kommaverstellung in den Zahlen für l_e der Spalte 5 genügt zur Angabe der Größe e. Der Höhenunterschied h ist gleich dem Produkt $20 \cdot l_h$. Die

Tafel 3. Feldbuch für die Messung mit dem Reduktionstachymeter.

Stand	Ziel	Richtung		Ziellatte		Probe	Höhen-Unterschied	Steigung	Höhe	Bemerkungen
		Zeiger A	Zeiger B	l_e	l_h	$l_e - l_h$	h			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	A	209,37	9,55							
	w_1			0,61'1	— 0,043	0,570	— 0,86		17,13	
	w_1'			0,74'3	+ 0,025	0,718	+ 0,50	± 1,36	18,49	Wie vorher
	C	75,95	276,12					+ 5,30		
	w_2			0,99'8	+ 0,290	0,706	+ 5,80		23,79	
	w_2'			0,85'6	+ 0,233	0,623	+ 4,66	— 1,14	22,65	
								(+ 5,52)		
								+ 0,36		
	9	316,7	116,9	0,81	+ 0,231	0,56	+ 5,02	— 2,62	23,01	
	10	317,3	117,3	0,57	+ 0,120	0,45	+ 2,40		20,39	
	11	390,8	190,9	1,12	— 0,280	0,83	— 5,60	— 8.00	12,39	

Steigungen sind nach der Regel „Vorblick minus Rückblick" gebildet, damit in Spalte 6 und 8 unmittelbar die an der Höhenkurve des Diagramms angebrachten Vorzeichen verwendet werden können, die für die Bemessung der Werte h von H aus nach U (Fig. 7) gelten.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß die Messungsweise mit dem Hammer-Fennelschen Instrument einfacher ist als die mit dem Puller-Breithauptschen Schiebetachymeter, weil bei ersterem nach der Einstellung des Fernrohrs nur zwei Ablesungen und nicht auch noch, wie bei letzterem, Verschiebungen vorzunehmen sind. Jenes Tachymeter läßt sich zur Meßtischtachymetrie so verwerten wie dieses; denn es brauchen bei entsprechender Einrichtung des Tachymeterunterbaues nur die Maße l_e unmittelbar an einem Alhidadenlineal abgemessen zu werden und die Punkte sind kartiert. Falls die Genauigkeit der Höhenaufnahme mit dem erstgenannten Instrument der mit dem letztgenannten nicht nachsteht, dürfte jenes sich als das leistungsfähigere Reduktionstachymeter erweisen. Heer hat bei einer Aufmessung mit dem Hammer-Fennelschen Instrument einschließlich aller Nebenarbeiten und der Prüfung von einem Achtel aller Höhen durch Nivellement im Durchschnitt 32 Punkte in der Stunde zahlenmäßig bestimmt. Dabei war auch alle Rechenarbeit erledigt. Wegen des Unterschieds in der Aufnahme- bezw. Darstellungsart darf diese Leistung offenbar nicht mit der für das Puller-Breithauptsche Instrument angegebenen verglichen werden.

Tichy will bei der graphischen Tachymetrie die Längenmessung überhaupt ausgeschlossen wissen. Er lässt gleichzeitig zwei Tachymeter mit Alhidadenlinealen auf benachbarten Standpunkten verwenden und Situationspunkte der Einzelmessung von beiden Instrumenten aus anschneiden. Diese Arbeit sollen billige Hilfskräfte mit

geringer technischer Vorbildung ausführen, während der Ingenieur unterdessen den Lattenträger anweist. Der eigentliche Lageplan wird erst später in häuslicher Arbeit durch Überdeckung der einzelnen Standpunktrisse hergestellt. Bei der Geländeaufnahme soll der Ingenieur mit einer kleinen Schlauchwage Punkte gleicher Höhe aufsuchen und diese dann von dem Meßgehilfen nach dem soeben beschriebenen Verfahren durch Vorwärtsabschnitte festlegen lassen. Diese Messungsweise dürfte mancherlei Nachteile haben und überhaupt nur in ganz offenem Gelände möglich sein. Wir müssen sie bei der weiteren Betrachtung übergehen, weil Tichy keine Genauigkeitsangaben bringt, die aus praktischen Messungen hergeleitet sind. Durch die Erfindung des Hammer-Fennelschen Tachymeters dürfte das Verfahren wohl überholt sein. Die Messung mit dem gen. Reduktionstachymeter bietet ungeübten Hilfskräften keinerlei Schwierigkeiten, wie Verf. oft zu beobachten Gelegenheit hatte. Es ist daher sehr zu begrüßen, daß das Hammer-Fennelsche Tachymeter neuerdings auch für die graphische Tachymetrie eingerichtet wird.

Abschnitt III.

Entstehung und Fortpflanzung der Messungsfehler.

Messungsfehler entstehen, wenn das Instrument nicht genau den Konstruktionsbedingungen entspricht und ferner, wenn der Beobachter oder der Lattenhalter nicht genau die der Theorie entsprechenden Einstellungen vornimmt, sowie wenn ersterer nicht genau die vom Instrument angezeigten Maße abliest. Eine infolge der Beschaffenheit

des Instruments stets gleichartig auftretende Fehlerursache erzeugt systematische Messungsfehler. Diese lassen sich durch Justierung des Instruments tilgen oder doch wenigstens rechnerisch berücksichtigen. Alle anderen Messungsfehler können für die vorliegenden Untersuchungen als zufällige angesehen werden, da weder bestimmte Beobachter noch bestimmte Beobachtungsverhältnisse vorausgesetzt werden. Das Auftreten und die Größe dieser zufälligen Fehler müssen nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beurteilt werden.

A. Systematische Fehler.

Der hohe Stand der Präzisionsmechanik ermöglicht es, tachymetrische Instrumente zu bauen, bei denen nur wenige Instrumentalfehler die erwünschte Genauigkeit tachymetrischer Messungen gefährden können. Vielfach hängen Instrumentalfehler nur von Einzelheiten der Konstruktion oder des Ausbaues der Instrumente ab und haben keine allgemeine Bedeutung. Deshalb sollen im vorliegenden Kapitel nur die drei auf S. 46/47 näher bezeichneten Tachymeter behandelt werden.

Selbst von den tachymetrischen Anschlußpunkten wird immerhin nur eine mindere Genauigkeit verlangt, sodaß auch für diese wichtigsten Aufnahmepunkte Teilungs- und Exzentrizitätsfehler unberücksichtigt bleiben können. Die Kreisablesungen für die Anschlußpunkte werden deshalb gewöhnlich nur an einem Zeiger vorgenommen. Tachymeter mit theodolitartigem Oberbau erhalten beim Gebrauch nicht selten große Fernrohrneigungen. Daher muß geprüft werden, ob übergroße Achsenfehler schädliche Einflüsse ausüben. Die Achsenfehler veranlassen Projektionsfehler q quer zur Sichtrichtung. Ist σ die Stehachsenneigung quer zur Sichtrichtung, ν die Kippachsenneigung, γ der Kolli-

mationsfehler, so wird nach bekannten Formeln der größte gesamte Richtungsfehler ε_r für den Höhenwinkel h:

$$\varepsilon_r = (\sigma + \nu) \operatorname{tg} h + \gamma \operatorname{tg} h \cdot \operatorname{tg} \frac{h}{2},$$

also für den sehr grossen Höhenwinkel $h = 45^0$:

$$\varepsilon_r = \sigma + \nu + 0{,}4\,\gamma$$

Setzt man etwa $\sigma = \nu = \gamma = 20''$, so wird $\varepsilon_r = 48''$ und demnach für je 100 m Entfernung $q = 2{,}3$ cm. Nach den Erörterungen auf der Seite 13 hat es im allgemeinen keinen Wert, einen wesentlich kleineren Betrag des Querfehlers q zu erstreben, als er für den Längenfehler befürchtet werden muß. Da man für je 100 m Zielweite auf einen Längenfehler von etwa 20 cm gefaßt sein muß, so ergibt sich, dass eine genaue Justierung von ν und γ im allgemeinen nicht notwendig erscheint. Auf die Höhenwinkelmessung wirken bekanntlich nur Glieder 2. Ordnung von ν und γ ein, die somit völlig zu vernachlässigen sind.

Es entstellt aber eine Stehachsenneigung in der Kippebene der Sicht deren Neigungsbestimmung um ihren vollen Betrag, falls nicht entweder die Zeiger des Höhenkreises mittels Alhidadenlibelle immer in dieselbe Richtung gegen die Horizontale gestellt werden, oder falls nicht jeder beobachtete bzw, eingestellte Höhenwinkel um den Höhenwinkel bei einspielender Fernrohrlibelle verbessert wird. Eine Alhidadenlibelle wird in Benutzung genommen, während das Fernrohr seine geneigte Lage behält. Zur Einstellung einer Fernrohrlibelle aber muß das Fernrohr immer wieder in die horizontale Lage

niedergelegt werden. Ihre Verwendung ist deshalb umständlicher und zeitraubender als die einer Alhidadenlibelle, gleichgiltig welcher Grundform das Tachymeter auch angehören mag; denn sie erfordert zu jeder Höhenwinkelmessung zwei Einstellungen und zwei Ablesungen. Da eine Alhidadenlibelle nur am Kreistachymeter angebracht wird, so kann nur bei diesem Instrument die Neigungsbestimmung der Sicht und damit die Höhenmessung trotz eintretender Stehachsenschwankungen zugleich genau und bequem durchgeführt werden. Beim Gefälltachymeter dagegen ist man auf eine Fernrohrlibelle angewiesen. Man stellt sie am besten vor der Lattenbeobachtung ein, nachdem das Fernrohr auf die Latte gerichtet ist, justiert nun entweder (durch Drehung der geteilten Hülse auf der Trommel) die Schraubenablesung so, daß sie sich genau gleich 10 ergibt, oder, was schneller geht, man merkt sich die etwa anders lautende Schraubenablesung w und zählt von derselben aus die Einstellungen o und u. Für eilige Beobachtungen kann man dieses Einstellungsverfahren ersparen, wie bereits auf S. 49 angegeben wurde. Beim Hammer-Fennelschen Reduktions-Tachymeter soll bei lotrechter Stehachse A (Figur 12) der Mittelradius $K\ O$ des Diagramms lotrecht stehen, die Sicht S und die Libellenachse L dagegen sollen parallel liegen. Zugleich soll noch das von der Linse Q (Figur 13) entworfene reelle Bild von $K\ O$ in die Prismenkante JJ (Figur 8 und 12) und dabei das Bild von O auf den Schnittpunkt von JJ und $C\ C$ fallen. Bei diesem Reduktionstachymeter sind also viel mehr Konstruktionsbedingungen miteinander verknüpft als bei den vorher betrachteten Instrumenten. Aus diesem Grunde sind die einzelnen Teile vielmehr gegeneinander festgelegt. Ihre gegenseitige Lage kann nur durch Justierung geändert werden. Auch das Diagramm D (Figur 12) läßt sich nur durch Justierschräubchen drehen, die sogar noch

durch besondere Versicherungsschrauben in ihrer Lage erhalten werden. Es ist deshalb nicht möglich, beim Hammer-Fennelschen Reduktionstachymeter Stehachsenschwankungen auf einfache Weise für die Höhenmessung unschädlich zu machen. Wohl kann man sie indessen an den auf der Alhidade des Horizontalkreises angebrachten Kreuzlibellen feststellen. Hat die Stehachse infolge der unabänderlichen äußeren Einflüsse eine übergroße Neigung erhalten, so muß sie von neuem mittels der Fußschrauben lotrecht gestellt werden. Da dadurch erfahrungsgemäß kleine Drehungen des Instruments auftreten, so müssen die Anschlußrichtungen von neuem abgelesen werden. Demnach können die unvermeidlichen Stehachsenschwankungen den Fortschritt der Beobachtung beim Reduktionstachymeter erheblich stören, und es ist deshalb bei seinem Gebrauch der zumeist unbeliebte Meßschirm besonders zu empfehlen. Indessen kann auch ein Meßschirm erfahrungsgemäß die Stehachsenschwankungen keineswegs ganz verhindern. Beim Puller-Breithauptschen Tachymeter tritt übrigens derselbe Übelstand auf. Auch bei ihm beeinflussen die Stehachsenschwankungen unmittelbar die Höhenmessung.

Man könnte Stehachsenneigungen durch äussere Einflüsse vielleicht für bedeutungslos halten. Um nun einen Anhalt zu haben, bis zu welchem Maße sie etwa vorkommen, ließ Verfasser während der Übungen in der Vermessungskunde an der Baugewerkschule zu Stettin durch die Schüler die Beträge ermitteln, um welche sich die Stehachse während der Dauer ihrer Beobachtungen geneigt hatte. Zwei Nivellierinstrumente und ein Theodolit mit verschiedenen Stativformen wurden bei Flächennivellements und Winkelmessungen längere Zeit auf denselben Standpunkten benutzt. Die längste Beobachtungsdauer betrug 75 Minuten. Beobachtungen von kürzerer Dauer als 12 Minuten wurden für die Untersuchung

fallen gelassen. Um nun alle beobachteten Stehachsenneigungen in einer gemeinsamen Ausgleichung behandeln zu können, wurde — offenbar ungünstig — angenommen, daß sich diese Neigungen verhältnisgleich mit der Aufstellungszeit vergrößert hätten. Dementsprechend wurden die beobachteten Beträge auf die Beobachtungsdauer von 1 Stunde umgerechnet. Die größte bzw. die kleinste Neigung für diese Zeit betrug 458" bzw. 0". Ein Meßschirm war nicht verwandt worden. Einige größere Beträge fanden sich auch bei bedecktem Himmel. Als mittlere Neigung aus 28 Beobachtungen verschiedener Schülergruppen während verschiedener Jahres- und Tageszeiten auf verschiedenen Bodenarten (sumpfige Wiese ausgeschlossen) ergaben sich 195" = rd. 3,2' für 1 Stunde. Dieser Betrag erscheint indessen sehr groß und wohl nur erklärbar durch die geringe Übung der Schüler im Aufstellen der Instrumente. Er zeigt aber immerhin, daß es unbedingt notwendig ist, die Stellung der Stehachse aufmerksam zu überwachen.

Weist die Stehachse ON_1 (Figur 14) in einer durch sie gelegten lotrechten Ebene die Neigung σ auf, so ist auch die senkrecht zur Stehachse justierte Sicht um σ geneigt, wenn sie in der bezeichneten lotrechten Ebene längs OM_1 liegt. Ist dagegen die Sicht senkrecht zu dieser Ebene längs ON gerichtet, so hat sie die Neigung 0. Irgend eine Zwischenlage OP_1 möge die Neigung ν haben. Eine begrenzte Strecke der Sicht beschreibt dann den Bogen NP_1 des größten Kreises einer um O gelegten

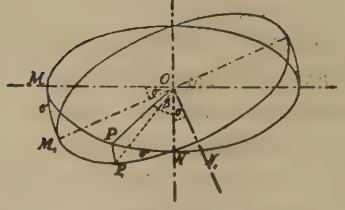


Fig. 14.

Kugel. Bei lotrechter Stehachse würde statt dessen der Bogen NP beschrieben. Beide Bögen liegen in dem sphärischen Dreieck NPP_1, das bei P rechtwinklig ist. Die Neigung ν wird durch den Bogen PP_1 veranschaulicht. Wird der Bogen NP mit β bezeichnet, so ist $\operatorname{tg}\sigma = \operatorname{tg}\nu : \sin\beta$, also ausreichend genau:

$$(1) \qquad \nu = \sigma \sin\beta.$$

Diese unvermeidliche Neigung kann, wie erwähnt, beim Kreistachymeter am leichtesten, weniger bequem beim Gefälltachymeter, am wenigsten einfach und nur bis zu einem gewissen Grade beim Reduktionstachymeter unschädlich gemacht werden. Ist der Indexfehler nicht voll beseitigt und wird der Restfehler nicht zur Verbesserung der Höhenwinkel α benutzt oder ist eine zur Höhenmessung verwendete Fernrohrlibelle nicht in Bezug auf die Sehachse justiert, so tritt der verbleibende Neigungsfehler konstant zu dem veränderlichen Wert ν hinzu. Der gesamte Neigungsfehler erzeugt periodische Höhenfehler. Indessen sind Neigungsfehler ε_α von mehreren Sekunden für die tachymetrische Höhenmessung belanglos.

Ein Fehler in k geht, wie die betr. Rechenformeln lehren, in die Höhenberechnung über. Beim Gefälltachymeter beeinflussen Fehler des Schraubengangs die Einstellungen bzw. Ablesungen o und u, erzeugen also Höhenfehler. Beim Hammer-Fennelschen Reduktionstachymeter wirkt eine falsche Stellung des Diagramms D, der Linse Q oder des Prismas P_2, auch ein fehlerhafter Abstand der beiden Objektivlinsen im anallaktischen Fernrohr auf die Größe und Lage der Bildstrecke p_h ein. Die bezeichneten Instrumentalfehler er-

zeugen mithin periodische Höhenfehler, die zu den obe
betrachteten noch hinzutreten.

Die Entfernungsmessung wird nur wenig durch Ne
gungsfehler, wesentlich aber durch Fehler in der E
mittelung bzw. Festlegung der Konstanten k beeinflu
Geringe Fehler bei der Ermittelung und Festlegung d
kleinen Konstanten c sind bedeutungslos. Das läßt scho
der Anblick der betreffenden Rechenformeln erkenne
Die Bestimmung von k geschieht bei allen Tachymeter
in entsprechender Weise, indem bekannte Strecken tach
metrisch gemessen werden und indem aus den bet
Rechenformeln nicht wie sonst e, sondern k, evtl. auch
bestimmt wird. Wenn auf diese Weise auch k bei de
verschiedenen Tachymeterformen mit gleicher Genauigke
ermittelt werden kann, so darf doch nicht überall m
gleicher Sicherheit auf den ermittelten Wert dauernd ge
rechnet werden. Beim gewöhnlichen Kreistachymeter m
festen Distanzfäden und orthoskopischem Okular im astro
nomischen Fernrohr ist k bei Verwendung geeignete
Materialien nahezu unveränderlich. Beim anallaktische
Fernrohr ändert sich k mit dem Abstand der Objektivlinse
Beim Gefälltachymeter können Abnutzung, Staub un
Rost auf Schraubengewinde, Schraubenspitze und Gleit
fläche und damit auf den Wert von k verändernd wirken
Am leichtesten und für den Beobachter gegebenenfalls un
merklich kann sich k beim Hammer-Fennelschen Reduk
tionstachymeter ändern besonders durch eine Ver
schiebung der kleinen Linse Q oder einer der Objektiv
linsen A und B (Figur 13.)

Aus allem ergibt sich, daß beim Hammer-Fennelschen
Tachymeter weitaus am ehesten systematische Fehler zu
befürchten sind, während das beim einfachen Kreistachy
meter am wenigsten der Fall ist. Wir werden im letzten
Abschnitt nach Mitteln suchen, um die schädlichsten
systematischen Fehler beim Hammer-Fennelschen Reduk-

tionstachymeter leicht auffinden bzw. beseitigen zu können.

B. Zufällige Fehler infolge schräger Lattenhaltung.

Eine tachymetrische Messung von Entfernung oder Höhe setzt eine bestimmte Stellung der angezielten Latte voraus. Wird diese Sollage nicht in Wirklichkeit von der Latte eingenommen, so entstehen Messungsfehler. Bei der vorliegenden Betrachtung ist die Sollage die lotrechte. Es soll der Lattenabschnitt $l = O - U$ (Figur 15). bestimmt werden. Statt seiner können, je nachdem die Latte in Hinsicht auf die Sichtrichtung um den Winkel γ vorwärts oder rückwärts geneigt ist, fehlerhafte Werte $l_1 = O_1 - U_1$ oder $l_2 = O_2 - U_2$ bestimmt werden. Man erkennt ohne weiteres aus der Figur, die mit zwei absolut gleichen, aber entgegengesetzten Werten von γ gezeichnet ist, dass der Lattenabschnitt bei einer Vorwärtsverstellung in Richtung der Sicht zu groß, im anderen Falle zu klein wird. Zur Darstellung der Fehlergrößen sind die Linien $MM' \parallel UU_1$ ferner $MM'' \parallel OO_1$ und $WMW' \parallel l_1$ gezogen. Um M sind

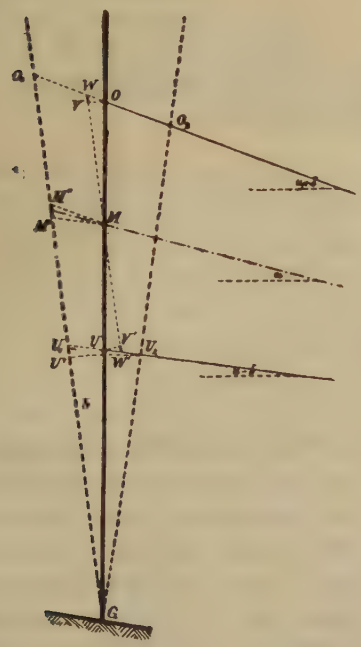


Fig. 15.

durch O und U die kurzen Kreisbogenstücke OV und UV' gelegt. l_1 übertifft l um die Strecken $M'M''$, VW und $W'V'$.

Die kurze Strecke $M'M''$ kann ausreichend genau als lotrecht gelten. Zufolge dieser genähert geltenden Annahme haben die beiden Längen MM' und MM'' dieselbe Horizontalprojektion $b \cdot \gamma$, wenn $b = GM$ gesetzt wird; auch sind die Dreiecke $M'M''M$ und UOK (siehe Figur 7) für gleiche Neigungswinkel α, die hier nur in Betracht kommen, einander ähnlich und es findet sich:

$$\frac{M'M''}{b\gamma} = \frac{l}{e}, \text{ folglich ist: } M'M'' = \frac{b\gamma l}{e}$$

Ferner ist in Fig. 15 $OV = MO \cdot \gamma$ und genau genug $VW = MO \cdot \gamma \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \delta)$. Entsprechend ist $W'V' = MU \cdot \gamma \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \delta)$. Die beiden letzten Werte kann man ausreichend genau zusammenziehen in

$$VW + W'V' = l \cdot \gamma \operatorname{tg} \alpha,$$

sodaß sich die Differenz $l - l_1$ zu

$$(2) \qquad \pm \triangle l = \frac{b\gamma l}{e} + l\gamma \operatorname{tg} \alpha$$

ergibt. Durch Vorsetzung beider Vorzeichen soll angedeutet werden, daß bei rückwärts geneigter Latte der Fehler mit nahezu demselben Absolutwert, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen auftritt als bei vorwärts geneigter. Das zweite Glied übt den größeren Einfluss aus. Jordan hat in der 3. Aufl. des 2. Bandes seines Handbuches der Vermessungskunde den Fehler unter Berücksichtigung von Grössen zweiter Ordnung noch

genauer entwickelt. Helmert ist in seiner Abhandlung „Der Einfluss der schiefen Stellung der Latte usw." (Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architektenvereins 1875 S. 154) davon ausgegangen, daß die Latte um ihre Sollage schwankt, sodaß statt U und O entweder die Ablesungen U_2 und O_1 oder die Ablesungen U_1 und O_2 im Feldbuch niedergelegt werden. Der dann auftretende Fehler $\triangle' l$ läßt sich im Anschluß an Formel (2) finden. Er ist größer als $\triangle l$. Der Zusatzfehler $\triangle' l - \triangle l$ vergrößert entweder den positiven oder er verkleinert den negativen Wert von $\triangle l$ und kann in jedem Falle gleich dem Maß $U' U_1$ angenommen werden, wenn $G U_2 = G U'$ gemacht wird. Das Stück $U' U_1$ ist genau genug gleich $U \cdot 2 \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha$, wenn U die Ablesung $G U$ bedeutet. Mithin ergibt sich:

$$(2^*) \qquad \pm \triangle' l = \frac{b \gamma l}{e} + (l + 2U) \gamma \operatorname{tg} \alpha.$$

Während der Messung mit dem Reichenbachschen Distanzmesser hat man beide Punkte O und U im Gesichtsfeld des Fernrohrs. Bei sorgfältigen Beobachtungen kann man mittels der Feinstellschraube bei der Einstellung des oberen Fadens auf U den Schwankungen der Latte folgen, also Werte O und U, die derselben u. U. fehlerhaften Lattenstellung zugehören, ermitteln. Dann gilt Formel (2) zur Ermittelung des Fehlers aus schräger Lattenstellung. Bei der Messung mit dem Kippdistanzmesser werden O und U nicht gleichzeitig durch Sehstrahlen festgelegt; man wird daher gut tun, sich auf Fehler nach Formel (2*) gefaßt zu machen. Aus beiden Formeln, besonders aus der letzten ergibt sich, daß es zur Sicherung gegen Fehler aus schräger Lattenstellung zweckmäßig ist, die Latte möglichst tief am Erdboden anzuzielen. Dem steht aber entgegen, daß dicht über dem

Erdboden die größten Refraktionsschwankungen des Lichtstrahls stattfinden. Diese verschlechtern die Ablesung wesentlich, was zahlenmäßig von L. S. Smith in Wisconsin nachgewiesen ist (Zeitschrift f. Vermessungswesen 1896 S. 659).

Aus den Formeln (2) und (2*) folgt:

$$\frac{\triangle l}{l} = \frac{b\gamma}{e} + \gamma \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{\triangle' l}{l} = \frac{b\gamma}{e} + (1 + \frac{2U}{l})\gamma \operatorname{tg} \alpha$$

Wenn man von der kleinen Konstanten c absieht, ergibt sich aus der Formel (21) im 1. Abschnitt (Seite 35) $e = lk \cos^2 \alpha$ und $\triangle e = \triangle l \cdot k \cos^2 \alpha$. Daher wird auch $\triangle e : e = \triangle l : l$ und entsprechend $\triangle h : h = \triangle l : l$. Mithin folgt:

(3) $$\pm \triangle e = b\gamma + e\gamma \operatorname{tg} \alpha$$

(3*) $$\pm \triangle' e = b\gamma + (1 + \frac{2U}{l}) e\gamma \operatorname{tg} \alpha$$

und unter Vernachlässigung unbedeutender Größen:

(4) $$\pm \triangle h = h\gamma \operatorname{tg} \alpha$$

(4*) $$\pm \triangle' h = (1 + \frac{2U}{l}) h\gamma \operatorname{tg} \alpha.$$

Die nachfolgende Tafel enthält berechnete Werte für die nach Vorstehendem auftretenden Fehler aus schiefer Lattenhaltung. Es ist $b = 1{,}4$ m, $e = 100$ m, $k = 100$ an-

genommen worden, sodaß sich in Metermaß $l = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ und genähert $U = b - \frac{l}{2}$ ergeben hat.

Die berechneten Werte können genau genug auch für Tachymeter gelten, bei denen statt des Mittelfadens der obere oder untere auf eine feste Lattenmarke eingestellt wird.

Tafel 4. Fehlerwerte infolge schräger Lattenhaltung in cm.
$e = 100$ m.

Höhenwinkel $\alpha =$		$\triangle e$ $\triangle h$					$\triangle' e$ $\triangle' h$	
	0^0	$2^0\,51{,}7'$ (1:20)	$5^0\,42{,}7'$ (1:10)	10^0	20^0	30^0	0^0	$2^0\,51{,}7'$ (1:20)	$5^0\,42{,}7'$ (1:10)
$\gamma = 1:300$ ($0^0\,11{,}3'$)	0	2	4	6	13	20	0	5	10
	0	0	0,3	1,0	4,4	11,1	0	0,2	0,9
$\gamma = 1:100$ ($0^0\,34'$)	1	6	11	19	38	59	1	15	29
	0	0,2	1,0	3,1	13,2	33,3	0	0,7	2,8
$\gamma = 1:50$ ($1^0\,9'$)	3	13	23	38	76	118	3	31	59
	0	0,5	2,0	6,2	26,5	66,7	0	1,4	5,6

Tichy gibt an, auf Grund umfassender Untersuchungen festgestellt zu haben, daß ein Meßgehilfe eine Latte freihändig ohne Hilfsmittel um etliche Grade, freihändig mit Benutzung eines Lotes oder einer Libelle um etwa 1^0 und unter Benutzung von Stützen und Lot oder Libelle um etwa $0{,}2^0 = 12'$ falsch halte. Für die beiden letzteren Tichyschen Angaben würden also etwa die 3. und 1. Doppelreihe der vorstehenden Tafel einzusehen sein. Jordan hingegen ist der Ansicht, daß die Latte ohne Haltestäbe mit Benutzung einer Dosenlibelle noch genauer als in der Neigung 1 : 100 gehalten werden könne. Dann würde die 2. Doppelzeile etwa die größten Fehlerbeträge angeben. Jedenfalls zeigen die Zahlen, daß für alle genaueren Messungen besonders bei größeren Neigungen die Latte unbedingt (am einfachsten mit einer oder zwei Baken) gestützt werden muß. Diese Regel ist für die Kipptachymeter noch sehr viel wichtiger als für Tachymeter mit Doppelfäden. Nach Friedrich ist die Latte auf $5' - 6'$ genau lotrecht zu stellen, wenn die Entfernung, wie er es verlangt, auf 0,1 % genau erhalten werden soll. Schell gibt an, daß durch ein Lattenstativ leicht eine Grenze des Schwankens von 5' erreicht werden könne. Die Lattenfehler sind zufällige. Ihr Einfluß kann, ebenso wie der der zufälligen Beobachtungsfehler, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung beurteilt werden.

C. Zufällige Beobachtungsfehler.

Während die systematischen Fehler sich bis auf unbedeutende Beträge durch Justierung beseitigen oder doch rechnerisch berücksichtigen lassen, ist das bei den zufälligen Fehlern nicht möglich. Man kann sie nicht vermeiden, höchstens durch geeignete Beobachtungsmaßnahmen

im allgemeinen innerhalb erwünschter Grenzen halten. Man kann nicht einmal die Größe der zufälligen Fehler sicher feststellen. Indessen zeigt die Erfahrung, daß zwischen der Größe der einzelnen zufälligen Fehler ε und der Häufigkeit $\varphi(\varepsilon)$ ihres Vorkommens gewisse Beziehungen bestehen. Für sorgfältige Messungen werden diese Beziehungen am besten durch das Gaußsche Fehlergesetz

$$\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon \tag{5}$$

dargelegt, in welchem die einer bestimmten Beobachtungsreihe zugehörige Konstante h als Genauigkeitsmaß auftritt. Statt ihrer verwendet man als Genauigkeitsmaß besser den aus gegebenen Beobachtungen bequem und besonders zuverlässig zu berechnenden mittleren Fehler μ, dessen Wert bei den hier ausschließlich auftretenden geraden Fehlerfunktionen durch die Formel

$$\mu^2 = \frac{\int_0^\infty \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon}{\int_0^\infty \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon} \tag{6}$$

bestimmt ist. h und μ stehen durch die bekannte Formel

$$h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \tag{7}$$

in gegenseitiger Beziehung. Bei einer endlichen Anzahl von Fehlern kann man μ nicht aus (6) berechnen, sondern ist auf den Näherungswert

6*) $$\mu^2 = [\varepsilon\,\varepsilon] : n$$

angewiesen. Die eckige Klammer gilt dabei als Summenzeichen. Bei sorgfältigen Beobachtungen ist also zugleich mit μ das Fehlergesetz gegeben und demnach bekannt, wie häufig man Fehler bestimmter Größen zu befürchten hat. Zu dieser wichtigen Feststellung liefert die Fehlerfunktion (5) das einzige mathematische Hilfsmittel. Sie zeigt zwar, daß theoretisch Fehler aller Größenwerte vorkommen können, doch ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten großer Fehler so gering, daß sie praktisch der Unmöglichkeit nahe kommt. Immerhin werden Messungsfehler und Fehlergrenzen von dem Beobachter anders beurteilt als von dem, der die Beobachtungen verwertet. Während letzterer es nach den Ausführungen der Einleitung für erwünscht halten muß, daß gewisse Maximalfehler bei der Messung nicht überschritten werden, kann ersterer eine sichere Gewähr für die Erfüllung dieses Wunsches nicht übernehmen. Höchstens kann er seine Messung so einrichten, daß die Erreichung jener Maximalfehler nur eine bestimmte, sehr geringe Wahrscheinlichkeit für sich hat. Statt Maximalfehler wird dann besser (nach Vogler) Fehler des p-ten Falles gesagt. Dennoch möge (nach Jordan) der mit Bezug auf die Verwertung der Messung geprägte Ausdruck „Maximalfehler" auch im folgenden beibehalten werden. Jordan tritt in der 3. Aufl. seines Handbuchs der Vermessungskunde dafür ein, daß es zweckmäßig sei, bei Fehlern, die dem Gaußschen Gesetz genügen, als Maximalfehler den Wert

(8) $$\mathfrak{M} = 3\,\mu\,,$$

einzuführen. Die (innere) Wahrscheinlichkeit für das Ein-

treten von Fehlern, die kleiner als $\mathfrak{M}$ sind, ist dann, aus (5) berechnet, bekanntlich

$$w_0^{\mathfrak{M}} = 0{,}9973 \tag{9}$$

Die (äußere) Wahrscheinlichkeit, größere Fehler über $\mathfrak{M}$ hinaus zu begehen, ist nur 0,0027. Demnach ist der aus (8) berechnete Wert der Fehler des 370. Falles, sobald (5) gilt. Für Aufnahmen zu Zwecken der Besitzstandsfeststellung und Besteuerung bestehen amtliche Bestimmungen, die nicht weit von der Festsetzung (8) abweichen. Die Katasterverwaltung läßt beispielsweise als höchste Abweichung D zweier Messungen derselben Strecke den vierfachen Betrag des mittleren Fehlers zu. Nach der Fehlertheorie darf demnach der einzelne Maximalfehler den Wert $\mathfrak{M} = D : \sqrt{2} = 4\,\mu : 1{,}414 = 2{,}83\,\mu$ haben. Wir wollen im folgenden die Festsetzung (8) übernehmen, sobald die Fehler ε dem Gesetz (5) genügen. Das aber kann für die Beobachtungsgrößen bei sorgfältigen tachymetrischen Messungen im allgemeinen mit demselben Recht wie bei anderen Messungen angenommen werden.

Für die Verwertungen tachymetrischer Messungen spielen nun die Beobachtungsfehler ε selbst nur eine mittelbare Rolle. Unmittelbar von Bedeutung sind erst die den Punktfehler erzeugenden Fehler ε_x der Entfernungs- und Höhenmessung selbst. Sie sind mathematische Funktionen der Beobachtungsfehler. Wir haben im folgenden diese Funktionen aufzusuchen und werden dabei finden, daß sie sich sämtlich in der Form

$$\varepsilon_x = a' \varepsilon' \pm a'' \varepsilon'' \pm \cdots \pm a^{(n)} \varepsilon^{(n)}$$

darstellen lassen, wenn mit a konstante Werte bezeichnet werden. Ebenso wie die Beobachtungsfehler ε, so sind auch die Funktionsfehler ε_x zufällige. Da sie der obigen Gleichung für ε_x genügen, so befolgen sie bekanntlich auch das Gaußsche Fehlergesetz, wenn die Beobachtungsfehler ε es befolgen. Wir können daher auf Grund dieses Fehlergesetzes die Größe und Häufigkeit aller zu befürchtenden Punktfehler für sorgfältige Messungen erkennen und auch vermittels (8) die Maximalfehler bestimmen, sobald wir nur die mittleren Entfernungs- und Höhenfehler berechnet haben. Für eilige Messungen gilt im allgemeinen das Gaußsche Fehlergesetz nicht mehr, weil bei ihnen vielfach absichtlich zugelassene größere Fehleranteile zu den unvermeidlichen hinzutreten. Um daher Größe und Häufigkeit der Messungsfehler bei eiligen Beobachtungen beurteilen zu können, müssen wir die dort gültigen Wahrscheinlichkeitsfunktionen ermitteln und können dann unter entsprechendem Vorgang wie bei sorgfältigen Beobachtungen als Maximalfehler diejenigen ansehen, für deren innere Wahrscheinlichkeit (9) gilt. Auch für die Beurteilung eiliger Messungen lassen sich die mittleren Fehler verwenden, wenn auch nicht mehr so zuverlässig wie bei sorgfältigen Messungen. Der einfacheren Darstellung wegen sollen die Wahrscheinlichkeitsfunktionen erst nach der Berechnung der mittleren Fehler eiliger Messungen bestimmt und besprochen werden. Es könnte nun vielleicht als das einfachste erscheinen, die Genauigkeitsmaße für die verschiedenen typischen Lage- und Höhenverhältnisse unmittelbar aus besonderen Versuchen zu bestimmen. Das ist jedoch aus verschiedenen Gründen untunlich. Jedes besondere Genauigkeitsmaß läßt sich nur aus einer größeren Anzahl von Versuchen herleiten, die ohne große Kosten nicht durchführbar sind. Hauptsächlich aber lassen sich solche größeren Versuche nicht unter peinlicher Innehaltung derselben äußeren Be-

obachtungsverhältnisse durchführen. Unmittelbar gefundene Genauigkeitsmaße dürften also nicht ohne weiteres verglichen, sondern müßten doch erst zur Ermöglichung eines Vergleichs umgewertet werden. Da die gesuchten Genauigkeitsmaße für die verschiedenen Lage- und Höhenverhältnisse mathematische Funktionen bestimmter, leicht aufzufindender Beobachtungsfehler sind, so lassen sich bereits mit deren Hilfe vergleichbare Genauigkeitsmaße auffinden. Dazu ist es zunächst nötig, die Funktionen zu ermitteln, die die Beziehungen der Längen- und Höhenfehler zu den Beobachtungsfehlern angeben.

Beim Gefälltachymeter entsteht ein Längenfehler ε_e aus Fehlern ε bei der Beobachtung der Einstellungen bzw. Ablesungen o, u, O und U. Die entsprechenden Fehler ε_o und ε_u, ε_O und ε_U entstehen unabhängig voneinander. Wird vorläufig der Fehler des Lattenabschnittes, d. h. die algebraische Summe von ε_O und ε_U mit dem Gesamtwert ε_l eingeführt, so ergibt sich der Längenmessungsfehler zu

$$\varepsilon_e = \frac{\delta e}{\delta l}\varepsilon_l + \frac{\delta e}{\delta o}\varepsilon_o + \frac{\delta e}{\delta u}\varepsilon_u$$

Für die Ausführung der Differentiation wird statt der Gebrauchsformel (3) des ersten Abschnittes die unter (11) aufgeführte (s. S. 30) benutzt, in welche (3) unter Einführung von (9) übergeht. Es entsteht:

$$\varepsilon_e = \frac{d}{o-u}\varepsilon_l - \frac{l\,d}{(o-u)^2}(\varepsilon_o - \varepsilon_u).$$

Mit Rücksicht aut (3) und (11) wird dann

$$\varepsilon_e = k \cdot \varepsilon_l - \frac{k\,e}{d}(\varepsilon_o - \varepsilon_u) \tag{10}$$

Demnach ergibt sich der mittlere Fehler der Längenbestimmung aus $\mu_e^2 = k^2 \mu_l^2 + \frac{k^2 \epsilon^2}{d^2} (\mu_o^2 + \mu_u^2)$. Man kann nun, wenn der mittlere Ablesungsfehler an der Latte μ_a genannt wird,

$$\mu_l^2 = \mu_O^2 + \mu_U^2 = 2 \mu_a^2$$

setzen. Ferner gilt: $\mu_o = \mu_u = d \mu_s$, wenn mit μ_s der Winkelwert bezeichnet wird, unter welchem man im Mittel die Sehachse durch die Gefällschraube falsch einstellt. Es folgt dann:

$$\mu_e^2 = 2 k^2 (\mu_a^2 + e^2 \mu_s^2) \tag{11}$$

Nicht nur der Einfluß des Schraubeneinstellungsfehlers, sondern auch der mittlere Ablesefehler ist von der Zielweite abhängig. Die Abhängigkeit hat sich bei verschiedenen Beobachtern ein wenig verschieden gezeigt. Mehrfach, z. B. durch Kummer (Ztschrft. f. Vermessungsw. 1897 S. 225), ist ein gleichmäßiges Wachstum des Ablesefehlers mit der Zielweite festgestellt worden. Diese einfachste Beziehung kann auch hier als ausreichende Annäherung angenommen und dementsprechend $\mu_a = e \mu_v$ gesetzt werden. Dann folgt:

$$\mu_e = \epsilon k \sqrt{2 (\mu_v^2 + \mu_s^2)} \tag{11*}$$

Für ein bestimmtes Instrument und für denselben Beobachter sind μ_v und μ_s konstant. Daher wird, wie bekannt, $\mu_e = c \cdot e$, d. h. der mittlere Entfernungsfehler wächst im gleichen Verhältnis mit der Zielweite.

Bei der Genauigkeitsbetrachtung einer Höhenmessung ist zu unterscheiden, ob die Gefällschraube benutzt wurde oder nicht. Im ersteren Falle sind zwei Schraubeneinstellungen und zwei Lattenablesungen, im letzteren ist nur eine Lattenablesung außer der Libelleneinstellung erforderlich. Die Höhenmessung mittels der Gefällschraube wird also wegen der größeren Anzahl von Fehlerquellen ungenauer als die durch gewöhnliches Nivellement. Führt man in die Gleichung (8,I) den Wert von m aus (10,I) ein, so entsteht, wenn $l = O - U$ gesetzt wird:

$$H = O + \frac{w - o}{o - u} (O - U)$$

Auch für die Berechnung eines Fehlers ε_H müssen die Einzelbeobachtungen O, U, o, u und w als unabhängig gelten. In die Nivellementsberechnung der Spalte 12 auf Tafel 1 geht von jedem einzelnen Höhenunterschied H ein Fehler

$$\varepsilon_H = \frac{\delta H}{\delta O} \varepsilon_O + \frac{\delta H}{\delta U} \varepsilon_U + \frac{\delta H}{\delta o} \varepsilon_o + \frac{\delta H}{\delta u} \varepsilon_u + \frac{\delta H}{\delta w} \varepsilon_w$$

ein. Durch Ausführung der Differentiationen entsteht mit Einführung der früheren Bezeichnungen:

(12)
$$\varepsilon_H = (m+1)\varepsilon_O - m\varepsilon_U - (m+1)\frac{e}{d}\varepsilon_o + m\frac{e}{d}\varepsilon_u + \frac{e}{d}\varepsilon_w$$

und beim Übergang zu mittleren Fehlern:

$$\mu_H^2 = (m+1)^2\mu_O^2 + m^2\mu_U^2 + \frac{e^2}{d^2}\left\{\mu_w^2 + (m+1)^2\mu_o^2 + m^2\mu_u^2\right\}$$

Wie vorher, so ist auch jetzt wieder $\mu_O = \mu_U = \mu_a$ und $\mu_o = \mu_u = d\mu_s$ zu setzen. μ_w ist der Einfluß des Libelleneinstellungsfehlers, in Schraubenteilen ausgedrückt. Nennt man seinen Winkelwert μ_L, so ist $\mu_w = d\mu_L$. Durch Einsetzung dieser Werte findet man den mittleren Fehler des einzelnen Vor- und Rückblicks aus:

$$(13) \quad \mu_H^2 = (2m^2 + 2m + 1)(\mu a^2 + e^2 \mu_s^2) + e^2 \mu_L^2$$

Diese Formel kann nur gelten, wenn die Gefällschraube auch wirklich benutzt wurde. Andernfalls, wenn also nur ein einfaches Nivellement vorliegt, gilt bekanntlich:

$$(14) \quad \bar{\mu}_H^2 = \mu_a^2 + e^2 \mu_L^2$$

Bei praktischen Arbeiten werden sich nun Beobachtungen mit und ohne Gefällschraube nebeneinander vorfinden. Sie müssen verschiedene Gewichte erhalten und zu deren Feststellung werden, wie die zuletzt entwickelten Formeln zeigen, die mittleren Fehler $\mu_a = e\mu_v, \mu_s$ und μ_L gebraucht oder doch wenigstens ihr Verhältnis. Werden im einfachsten Fall in Ermangelung besonderer Beobachtungen μ_v, μ_s und μ_L gleich groß angenommen, so ergibt sich aus (13):

$$(15) \quad \mu_H = 2e\mu_v \sqrt{m^2 + m + \tfrac{3}{4}}$$

Bei Beobachtungen ohne Gefällschraube entsteht in entsprechender Weise aus (14):

(16) $$\mu_H = e\,\mu_v \sqrt{2}$$

Bei neuen Schrauben, an deren Spitze, Gleitfläche und Gewinde kein Rost, Staub oder dergleichen anhaftet, kann μ_s in (13) vernachlässigt werden. Dann ergibt sich statt (15):

(15*) $$\mu_H = e\,\mu_v \sqrt{2\,(m^2 + m + 1)}$$

Diese Formel entwickelt Vogler (Prakt. Geometrie II § 278). Die bisher entwickelten Fehlerausdrücke beziehen sich auf das in der Tachymetrie fast ausschließlich anzuwendende Lorbersche Beobachtungsverfahren.

Bei der Längenmessung nach Hogrewe ist der frühere Wert k veränderlich. Setzt man nach (3,I) $k = e : l$ in Formel (11*) ein so wird:

(17) $$\mu_e = \frac{e^2}{l} \sqrt{2\,(\mu_v^2 + \mu_s^2)}.$$

Für die Höhenmessung nach Hogrewe ist statt der früheren Größe m nach (7,I) der Wert $h : l$ zu setzen. Dann wird aus (15):

(18) $$\mu_H = 2\,e\,\mu_v \sqrt{\frac{h^2}{l^2} + \frac{h}{l} + \frac{3}{4}}$$

bzw. aus (15*):

(18*) $$\mu_H = e\,\mu_v \sqrt{2\,\left(\frac{h^2}{l^2} + \frac{h}{l} + 1\right)}$$

Daß die letzte Formel mit der von Vogler (Praktische Geometrie II § 278) unter (10) angegebenen nicht übereinstimmt, liegt lediglich daran, daß der hier gewählte Wert h ein anderer ist als der von Vogler mit b bezeichnete. Durch Einsetzen von $b - a = h$ gehen beide Formeln ineinander über.

Die anderen auf S. 52 bis 54 aufgeführten Kipptachymeter ergeben e und h auch nach den Formeln (1) oder (3), (7) bis (10) des ersten Abschnittes. Die Differentialformeln für ε_e und ε_h können demnach allgemein für Kipptachymeter angewendet werden.

In entsprechender Weise wollen wir nunmehr den Längen- und Höhenfehler ableiten, der beim Kreistachymeter zu befürchten ist und gehen dabei am besten von den einfachsten Formeln (21) und (22) des ersten Abschnittes (S. 35) aus. In ihnen sind die Werte l und α durch unabhängige Beobachtungen gewonnen. Fehler in diesen Größen erzeugen Längenfehler im Betrage von

$$\varepsilon'_l = \frac{\delta e}{\delta l}\varepsilon_l + \frac{\delta e}{\delta \alpha}\varepsilon_\alpha .$$

Durch Differentiation der Gleichung (21,I) ergibt sich:

$$\frac{\delta e}{\delta l} = k \cos^2 \alpha$$

$$\frac{\delta e}{\delta \alpha} = -2\left(\frac{c}{k} + l\right) k \sin \alpha \cos \alpha = -2h$$

Demnach entsteht ein Einzelfehler

$$\varepsilon'_e = k \cos^2 \alpha \cdot \varepsilon_l - 2h \cdot \varepsilon_\alpha . \tag{19}$$

Der mittlere Fehler ergibt sich also aus:

$$\mu'_e{}^2 = k^2 \cos^4 \alpha \cdot \mu_l{}^2 + 4 h^2 \mu_\alpha{}^2. \tag{20}$$

Wird, wie auf S. 84, $\mu_l = e\mu_v \sqrt{2}$ gesetzt und Gleichung 6 des I. Abschnitts berücksichtigt, so findet sich:

$$\mu'_e{}^2 = 2 e^2 (k^2 \cos^4 \alpha \cdot \mu_v{}^2 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \mu_\alpha{}^2). \tag{21}$$

Gewöhnlich sind die Neigungswinkel nicht sehr groß. In diesem Fall und allgemein bei gleichen Fernrohrneigungen wachsen die mittleren Längenfehler im gleichen Verhältnis wie die Längen selbst, ganz so wie es Formel (11*) für die Längenmessung durch Kipptachymeter nach Lorber andeutete.

Ein Einzelfehler der Höhenbestimmung ergibt sich aus:

$$\varepsilon'_h = \frac{\delta h}{\delta l} \varepsilon_l + \frac{\delta h}{\delta \alpha} \varepsilon_\alpha.$$

Nach Spalte 9 und 10 der Tafel 2 auf S. 57 werden die Werte h unmittelbar zur Berechnung des tachymetrischen Nivellements verwandt. Die Steigungen der Spalte 10 beziehen sich bei überall gleichen Einstellungen M unmittelbar auf die Punkte M, nicht, wie bei den Kipptachymetern, auf die Punkte G. Die Fehler ε'_h setzen sich also additiv zu dem gesamten Nivellementsfehler zusammen, so wie die Fehler ε_H bei den Kipptachymetern. Beide Fehler entsprechen sich.

Aus Formel (22,I) S. 35 entsteht durch Differentiati

$$\frac{\delta h}{\delta l} = k \sin\alpha \cos\alpha = \frac{k}{2} \sin 2\alpha,$$

$$\frac{\delta h}{\delta \alpha} = (\frac{c}{k} + l) k \left\{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right\} =$$

$$\frac{\delta h}{\delta l} = e - (\frac{c}{k} + l) k \cos^2\alpha \operatorname{tg}^2\alpha = e(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)$$

Demnach wird:

$$(22) \qquad \varepsilon'_h = \frac{k}{2} \sin 2\alpha \cdot \varepsilon_l + e(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)\varepsilon_\alpha,$$

$$(23) \qquad \mu'^2_h = \frac{k^2}{4} \sin^2 2\alpha \cdot \mu_l^2 + e^2(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)^2 \mu_\alpha^2.$$

Wird wiederum $\mu_l = e\mu_v\sqrt{2}$ gesetzt, so findet sich:

$$(24) \qquad \mu'^2_h = e^2 \left\{\frac{k^2}{2} \sin^2 2\alpha \cdot \mu_v^2 + (1 - \operatorname{tg}^2\alpha)^2 \mu_\alpha^2\right\}$$

Bei geringen Neigungsunterschieden wächst also auch de mittlere Höhenfehler nahezu verhältnisgleich mit de Länge.

Im I. Abschnitt sind die bei den verschiedener Tachymetern anzuwendenden Rechenformeln für e und l von demselben Ausdruck (4) abgeleitet worden. Die Abweichungen in den Rechenformeln (15) bis (18) von den entsprechenden Formeln (21) und (22) bzw. (19) und (20) des I. Abschnitts rühren nur daher, daß die Höhenwinkel α für gleiche Werte von e und l sich um $\pm \frac{\delta}{2}$ unterscheiden. Setzt man in alle jene Formeln l und α mit

gleichen, in der tachymetrischen Praxis vorkommenden Werten ein, so ergeben sich e und h bis auf geringe Unterschiede übereinstimmend. Bei Höhenunterschieden unter 45^0 sind diese Unterschiede kleiner als $e:k$ bzw. $h:k$, wie sich aus der Vergleichung der Formeln (15) und (16) mit (19) und (20) des I. Abschnitts unmittelbar ergibt. Die Differentiation der bezeichneten Unterschiede, die hier übergangen werden mag, zeigt, daß die Fehler der Unterschiede gegen μ'_e und μ'_h selbst unbedenklich vernachlässigt, die zuletzt entwickelten Formeln (19) bis (24) also für alle Fadentachymeter mit festen Fäden verwendet werden können. Selbst für das Puller-Breithauptsche Tachymeter lassen sich diese Formeln verwenden, doch soll darauf nicht weiter eingegangen werden.

Werden e und h mittels beweglicher Fadenabstände im Okularschraubenmikrometer gemessen, so sind andere Konstanten zu benutzen. Bei der Entwickelung der Fehler aus den dazu in Betracht kommenden Formeln (23) und (24) des Abschnitts I brauchen die zweiten und dritten Glieder wegen der Kleinheit der auf sie entfallenden Fehleranteile nicht berücksichtigt zu werden. Es liegen drei unabhängige Beobachtungswerte l, α und n vor. Die früheren Differentiationen können benutzt werden, wenn statt k der veränderliche Wert $k_0 : (m+n)$ gesetzt wird. Außerdem muß der Differentialquotient

$$\frac{\delta e}{\delta n} = -\frac{k_0 l}{(m+n)^2} \cos^2\alpha = -\frac{e}{m+n}$$

in die Fehlerformel eingefügt werden. Er nimmt durch Erweiterung mit $f \cdot g$ und Einsetzung der auf S. 36 bereits benutzten Werte

$$\frac{f}{g(m-n)} = \operatorname{ctg}\delta = \frac{e}{\cos\alpha} : l\cos\alpha = \frac{e}{l\cdot\cos^2\alpha}$$

und $\frac{f}{g} = k_0$ die Form an:

$$\frac{\delta e}{\delta n} = -\frac{e^2}{k_0\cdot l\cdot\cos^2\alpha}.$$

Ferner kann gesetzt werden:

$$\frac{\delta e}{\delta l} = \frac{k_0\cos^2\alpha}{m+n} = \frac{e}{l}$$

Daher ergibt sich statt (19) für das Tachymeter mit Okularschraubenmikrometer:

$$(19^*) \qquad \varepsilon'_e = \frac{e}{l}\cdot\varepsilon_l - \frac{e^2}{k_0\cdot l\cdot\cos^2\alpha}\varepsilon_n - 2h\cdot\varepsilon_\alpha.$$

Der mittlere Fehler findet sich, wenn sogleich $\mu_l = e\mu_\nu\sqrt{2}$ gesetzt wird, aus:

$$(21^*) \qquad \mu'^2_e = \frac{e^4}{l^2}\left(2\mu_\nu^2 + \frac{\mu_n^2}{k_0^2\cos^4\alpha}\right) + 4e^2\operatorname{tg}^2\alpha\,\mu_\alpha^2.$$

Ganz entsprechend entsteht:

$$(22^*) \qquad \varepsilon'_h = \frac{h}{l}\varepsilon_l - \frac{h\cdot e}{l\cdot k_0\cdot\cos^2\alpha}\cdot\varepsilon_n + e(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\varepsilon_\alpha,$$

$$(24^*)$$

$$\mu'^2_h = \frac{e^4}{l^2}\operatorname{tg}^2\alpha\left(2\mu_\nu^2 + \frac{\mu_n^2}{k_0^2\cos^4\alpha}\right) + e^2(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2\mu_\alpha^2$$

Für die Beobachtungen mit dem Hammer-Fennelschen Reduktionstachymeter gelten die Formeln (3) und (7) des I. Abschnittes. In ihnen sind die Lattenabschnitte l, d. h. in (3) l_e und in (7) l_h, die einzigen Beobachtungswerte. Es ist aber zu berücksichtigen, daß die zugleich mit der Lotrechtstellung der Stehachse zu vollziehende Lotrechtstellung des Diagramm-Mittelradius OK (Figur 12) mit einem Neigungsfehler behaftet sein kann. Derselbe beeinflußt nur die Höhenmessung. Die Fehler in l_e seien ε_{le} und μ_{le}, die in l_h seien ε_{lh} und μ_{lh} benannt. Es findet sich:

(25) $$\varepsilon''_e = k \cdot \varepsilon_{le};$$

(26) $$\mu''_e = k \cdot \mu_{le}$$

und

(27) $$\varepsilon''_h = m \cdot \varepsilon_{lh} + e \cdot \varepsilon_L,$$

(28) $$\mu''_h = \sqrt{m^2 \mu_{lh}^2 + e^2 \mu_L^2}$$

Dieselben Formeln gelten auch für andere Tachymeter mit selbsttätiger Reduktion.

Bereits auf S. 30 wurde darauf hingewiesen, daß sich das Hogrewesche Messungsverfahren für die Tachymetrie nicht eignet. Daher können auch die Formeln (17), (18) und (18*) nur in Ausnahmefällen Anwendung finden. Vergleicht man sie mit den entsprechenden (11*) (15) und (15*), so zeigt sich, daß die entsprechenden mittleren Fehler gleich werden, falls $l = e : k$ bzw. $l = h : m$, d. h. falls l so gewählt wird, wie es sich bei

dem Lorberschen Verfahren ohnehin ergeben würde. Wählt man l dagegen größer, so verkleinern sich die Längen- und Höhenfehler im Verhältnis der Vergrößerung von l — und umgekehrt. Es ergibt sich mithin, daß man in Ausnahmefällen die Messungsgenauigkeit dadurch erhöhen kann, das man ein größeres Maß $o—u$ an der Tangentenkippschraube wählt, also etwa 2, statt wie gewöhnlich 1. Dadurch wird der Lattenabschnitt l größer, etwa doppelt so groß. Dann werden die mittleren Fehler nur etwa halb so groß wie sonst.

Nicht die gleichen Vorteile sind durch Benutzung beweglicher Fäden des Fadendistanzmessers zu erreichen. Wie die obige Entwickelung auf S. 91/92 zeigt, treten bei Anwendung beweglicher Fäden neue Beobachtungsgrößen, also auch neue Fehlerquellen auf. Selbst wenn diese vernachlässigt werden könnten, nimmt besonders der Höhenfehler μ'_h noch nicht in demselben günstigen Verhältnis bei einer Vergrößerung von l ab wie beim Kippdistanzmesser, weil er durch einen Neigungsfehler μ_α stark beeinflusst wird. Vor allem kann aber der Lattenabschnitt l beim Fadendistanzmesser kaum über das Maß $e:k$ hinaus vergrößert werden, weil Abbildungsfehler eine starke Vergrößerung der Bildstrecke p im Diaphragma verhindern.

Der einzige Vorteil des Okularschraubendistanzmessers liegt darin, daß man nicht an der Latte abzulesen braucht, sondern beide Fäden auf feste Marken einstellen kann. Der Fehler μ_l läßt sich also ein wenig verringern, wie aus den Ausführungen des nächsten Abschnitts hervorgeht. Dieser Vorteil dürfte aber die sonstigen Nachteile der Einrichtung nicht aufwiegen, jedenfalls nicht innerhalb der hier zugrunde gelegten Entfernungen bis etwa zu 200 m, innerhalb derer man noch an der „selbstablesbaren" Latte ablesen kann. Friedrich

hat aus Versuchen die Gleichwertigkeit des Reichenbachschen und des Okularschraubendistanzmessers für Längen unter 100 m festgestellt. Für größere Entfernungen zieht er den letzteren allerdings vor. Wir können uns, da wir weite Entfernungen ausschliessen, im folgenden auf die Behandlung des Reichenbachschen Distanzmessers mit festen Bildmarken beschränken. Der Okularschraubendistanzmesser hat keine weite Verbreitung gefunden. Tichy hat ihn früher für sein Reduktionstachymeter (S. 39) verwendet, er hat ihn später aber wieder aufgegeben.

Abschnitt IV.

Mittlere und maximale Fehlerwerte bei sorgfältigen Beobachtungen.

A. Kipptachymeter.

Genauigkeitsangaben für Kipptachymeter aus praktischen Messungen finden sich in der Literatur nur spärlich, für das Voglersche Gefälltachymeter anscheinend garnicht. Daher mögen zunächst die mittleren Fehler der auf S. 48 erwähnten Arbeit hergeleitet werden.

Die Lageaufnahme wurde an Polygonpunkte der Wartheflussaufnahme angeschlossen, indem zwischen ihnen tachymetrische Polygonzüge mit Brechungswinkelmessung eingehängt wurden. Zur doppelten Streckenmessung und zur doppelten Übertragung der Höhen dienten in jeder Polygonseite je zwei Wechselpunkte. Von den neuen Polygonpunkten aus wurde die Einzelaufnahme vorgenommen. Höhenanschlußpunkte fanden sich in solcher Anzahl und Verteilung vor, daß nur kurze Anschlußnivellements erforderlich waren.

Auf die erreichte Genauigkeit läßt sich auf zweierlei Weise schließen, einmal aus den äußeren Fehlern, die sich aus den Anschlußmessungen der tachymetrischen Nivellements- und Polygonzüge ergeben und sodann aus den inneren Fehlern, die die doppelten Strecken- und Höhenunterschiedsmessungen zwischen den Instrumentenstandpunkten aufweisen.

Zum Anschluß für die Lagebestimmung sind Polygonpunkte verwendet, die früher nach den Vorschriften der Katasteranweisung IX eingemessen und berechnet waren. Nimmt man ihre Koordinaten als fehlerlos an, so ergeben sich die Zähler der folgenden Brüche als Abschlußfehler der Winkelsummen in Minuten, während die Nenner die nach der Katasteranweisung IX erlaubten Fehlergrenzen darstellen: $\frac{-5}{3}$, $\frac{+1}{3}$, $\frac{-5}{3{,}7}$, $\frac{+1}{2{,}6}$, $\frac{+2}{3{,}4}$, $\frac{+2}{2{,}6}$. Es ist kein Wert darauf gelegt worden, die Nivellierlatte, die zur Punktbezeichnung verwendet wurde, am Fuße anzuzielen.

Die Winkelfehler wirken nicht erheblich auf die linearen Abschlußfehler ein, da die Polygonzüge ziemlich gestreckt ausgewählt werden konnten. Die Koordinatenabschlußfehler rühren also größtenteils von fehlerhafter Streckenmessung her. Sie bleiben sämtlich innerhalb der Grenzen, die die Katasteranweisung IX für ebenes Gelände vorschreibt, wie die nachfolgenden, in cm angegebenen Fehlerwerte durch die bekannte Bruchform erkennen lassen: $\frac{9}{45}$, $\frac{21}{46}$, $\frac{17}{74}$, $\frac{31}{33}$, $\frac{20}{50}$, $\frac{13}{35}$. Da man nun nicht annehmen kann, daß die gewählten Anschlußpunkte nur ganz unbedeutende Fehler haben und da ihre Fehler nicht bekannt sind, so wird der mittlere Längenfehler nur aus den inneren Fehlern, die durch die Doppel-

messungen aufgedeckt werden, ermittelt. Die doppelte Streckenmessung ist in Figur 16 dargestellt. Für jede Poly-

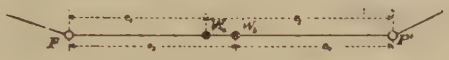


Fig. 16.

gonseite besteht zwischen den gemessenen Längen e und den Verbesserungen λ die Bedingung:

$$e_1 + \lambda_1 + e_2 + \lambda_2 - e_3 - \lambda_3 - e_4 - \lambda_4 = 0$$

Wird der Messungswiderspruch $e_1 + e_2 - e_3 - e_4 = w$ gesetzt, so lautet die vereinfachte Bedingungsgleichung:

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 + w = 0$$

Daraus entsteht, wenn $\varkappa$ die Korrelate und g das Gewicht einer Messung ist, nach bekannten Regeln für die Ausgleichung bedingter Beobachtungen die Normalgleichung mit der üblichen Summenbezeichnung:

$$\left[\frac{1}{g}\right] \varkappa + w = 0$$

Es folgt:

$$\varkappa = \frac{-w}{\left[\frac{1}{g}\right]}$$

Der mittlere Wert der Einzelmessung vom Gewicht $g = 1$ hat somit den Wert

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{1}} = \pm \sqrt{-wx},$$

woraus sich ergibt:

(1) $$\mu = \pm \sqrt{\frac{w^2}{\left[\frac{1}{g}\right]}}$$

Da $g = K : \mu^2$, so ergibt sich aus Gleichung (11*) des vorigen Abschnittes: $g_e = \frac{c_1}{e^2}$, soòaß für eine bestimmte Entfernung e

$$\mu_e = \pm \sqrt{\frac{w^2}{[e^2]}}$$

wird. Die derart berechneten mittleren Fehler aus n Messungen können nach der Formel

(2) $$\mu_n = \pm \sqrt{\frac{[\mu^2]}{n}}$$

vereinigt werden.

Aus $n = 23$ Strecken fand sich auf diese Weise der mittlere Fehler für die einmalige Messung einer Strecke von 100 m Länge zu $\mu_e = \pm 0{,}214$ m. Wird dieser Wert durch $k\sqrt{2}$ dividiert, so folgt nach Gleichung (11*) des vorigen Abschnitts: $e \sqrt{\mu_v^2 + \mu_s^2} = 0{,}00151$ m. Dieser Betrag entspricht einem Winkelwert von $\frac{0{,}00151}{100} \varrho'' = 3{,}1''$.

Die doppelte Messung des Höhenunterschieds je zweier Wechselpunkte auf derselben Polygonseite liefert

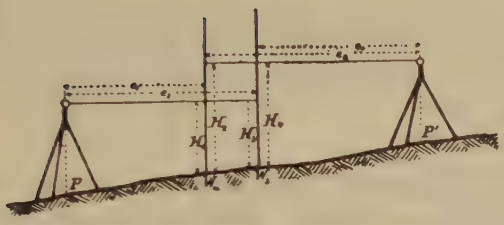


Fig. 17.

mit den Bezeichnungen der Figur 17 die Bedingungsgleichung:

$$H_1 + \lambda_1 - H_3 - \lambda_3 + H_4 + \lambda_4 - H_2 - \lambda_2 = 0$$

Wird der Messungswiderspruch $H_1 - H_3 + H_4 - H_2 = w$ gesetzt, so ergibt sich auch hier zur Berechnung des mittleren Fehlers einer einzelnen Höhenmessung vom Gewicht 1 die obige Gleichung (1), in welche $g = 1 : \mu_H^2$ oder $1 : \overline{\mu}_H^2$ unter Benutzung von Gleichung (15) bzw. (15') oder (16) des vorigen Abschnitts (S. 86/87) eingeführt werden kann. Die Zahlentafel auf S. 101 enthält berechnete Werte der Verhältniszahlen $\mu_H : \overline{\mu}_H$ nach (15) und $\mu'_H : \overline{\mu}_H$ nach (15*) bzw. (16) für gleiche Strecken e. Die Tafel kann unter den angegebenen Voraussetzungen zur Gewichtsberechnung benutzt werden. Durch Vereinigung der mittleren Fehler von 18 Doppelmessungen nach Formel (2) hat sich bei der Arbeit des Verf. unter Benutzung von Formel (15,III) für eine einzelne Sicht von 100 m Länge $\mu_H = \pm 2{,}3$ mm ergeben. Der mittlere entsprechende Winkelfehler beträgt $\mu_\alpha = \frac{0{,}0023}{100} \varrho'' = 4{,}7''$. Er besteht aus dem Lattenablesungs- und Libellen-, bzw. Schraubeneinstellungsfehler. Aus dem zurückbehaltenen Beobachtungsmaterial lassen sich μ_v, μ_s und μ_L nicht sicher

trennen. Besondere Untersuchungen über die Größe dieser Fehler konnten während der Arbeit nicht ausgeführt werden. Daher kann der Wert von 2,3 mm nicht als streng gelten. Die Zielweiten schwankten zwischen 25 und 140 m.

Die Nivellementszüge wurden zwischen vorhandene Höhenbolzen eingehängt. Werden bei den vorliegenden drei Anschlüssen die Gewichte nur nach den nivellierten Längen ohne Rücksicht auf die Benutzung der Gefällschraube bemessen, so ergibt sich der mittlere Nivellierfehler für ein einmaliges Nivellement von 1 km Länge zu $\pm$ 12,8 mm.

Die Arbeit wurde nicht gerade unter günstigen Verhältnissen ausgeführt. Gewöhnlich standen 2, bisweilen 3, zeitweise stand auch nur ein Arbeiter zur Verfügung. Je nach der Anzahl der Arbeiter wurde mit einer oder mit zwei Latten gearbeitet. Teilweise hinderte dichtes Weidengebüsch den Arbeitsfortschritt. Im Durchschnitt konnten 20—30 Punkte in einer Stunde aufgenommen werden. Zumeist herrschte glühender Sonnenbrand. Da ein Nivellierschirm fehlte, so befolgte Verf. anfangs die alte Regel, das Instrument von der Sonne völlig durchwärmen zu lassen. Es zeigte sich aber bald, daß die Libelle viel weniger ausschlug, wenn sie notdürftig beschattet wurde. Die Befolgung obiger Regel wurde daher aufgegeben.

Die Gleichungen (10) und (11) des vorigen Abschnitts zeigen, daß μ_e von der Fernrohrneigung unabhängig ist. μ_H ändert sich dagegen stark mit derselben. Die folgende Zahlentafel enthält berechnete Werte von μ_H nach Formel (15) für die verschiedenen Konstanten m unter Zugrundelegung des oben ermittelten Wertes von 2,3 mm. Zum Vergleich sind auch Werte für μ_H nach Formel (15*) beigefügt. In der mit „Durchschnitt" über-

schriebenen Spalte sind die Werte der betr. Reihe unter der (ungünstigen) Annahme zusammengefaßt, daß alle Konstanten m gleich häufig benutzt werden.

Tafel 5. Fehlerwerte für sorgfältige Beobachtungen mit dem Gefälltachymeter — ohne Lattenfehler —.

$c = 100$ m.

Formel des Abschn. III	m =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Durchschnitt	Einheiten
15 u. 16	$\mu_H : \bar{\mu}_H$	1	2,3	3,7	5,0	6,4	7,8	9,2	10,7	12,1	13,5	14,9	—	—
15* u. 16	$\mu'_H : \bar{\mu}_H$	1	1,7	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6	7,6	8,5	9,5	10,5	—	—
15	μ_H	0,2	0,5	0,8	1,2	1,5	1,8	2,1	2,5	2,8	3,1	3,4	2,1	cm
15*	μ'_H	0,2	0,4	0,6	0,8	1,1	1,3	1,5	1,7	2,0	2,2	2,4	1,5	„

Die Tafel veranschaulicht, daß der Höhenfehler besonders nach Formel (15) erheblich schneller als m wächst. Der Beobachter muß also mit möglichst kleinem m auszukommen suchen.

(Mit einem Kipptachymeter-Theodoliten, dessen Fernrohr 22fach vergrösserte, hat Prof. Kunze Polygonmessungen ausgeführt und an diese Genauigkeitsuntersuchungen angeschlossen (Zeitschrift für Vermessungswesen 1901 S. 349). Die Längen ermittelte er nach dem Hogreweschen

Verfahren mit Lattenabschnitten l von 1 m, 2 und 3 m. Unter ungünstigen äusseren Verhältnissen bei großer Hitze fand er die nachbezeichneten mittleren Fehler auf 100 m Länge.

Für $l = 3{,}00$ m war $\mu_e = 0{,}166$ m
„ $l = 2{,}00$ m war $\mu_e = 0{,}203$ m
„ $l = 1{,}00$ m war $\mu_e = 0{,}286$ m

Diese Zahlen stellen Durchschnittswerte für alle Entfernungen dar. Bei der Bestimmung der Lattenabschnitte zwischen Zieltafeln hat Kunze auf alle Entfernungen bis zu 450 m etwa dieselben mittleren Ablesefehler erhalten. Die Neigungen der Sicht teilt er nicht mit.

Jordan fand mit einem Kipptachymeter nach dem Hogreweschen Beobachtungsverfahren bei Einstellung auf einen Lattenabschnitt von 3 m einen mittleren Fehler von 0,229 m auf 100 m Länge. Ztschft. f. Vermessungswesen 1875 S. 362.) Das Fernrohr besaß 30fache Vergrößerung.

B. Kreistachymeter.

Untersuchungen über die Arbeitsgenauigkeit, die mit dem Kreistachymeter bei Längenmessungen zu erreichen ist, finden sich in größerer Anzahl. Bei geringen Fernrohrneigungen und 24—30fachen Fernrohrvergrößerungen sind für $k = 100$ die nachstehend aufgeführten mittleren Längenfehler auf 100 m Länge gefunden worden:

Von Helmert $\mu_e = 0{,}25$ m
„ Stambach 0,25 m
„ Jordan 0,23 m
„ C. Wagner 0,2 m
„ Brönnimann 0,196 m
„ Friedrich 0,16 m.

Die in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1886 S. 49 mitgeteilten Versuche von R. Wagner, die nur einen Fehler von 0,05 % bis 0,06 % ergaben, können hier nicht zum Vergleich herangezogen werden, da sie absichtlich nur unter den günstigsten äußeren Umständen vorgenommen wurden, während hier durchschnittliche Verhältnisse der Praxis zugrunde gelegt werden müssen.

Mittlere Höhenfehler μ_h scheinen nicht bekannt gegeben zu sein; daher soll mittels μ_e auf μ_h geschlossen werden.

Aus den mitgeteilten Zahlen ergibt sich, daß die Längenfehler bei Verwendung des Reichenbachschen Entfernungsmessers nicht wesentlich abweichen von denjenigen, die sich bei Verwendung der Gefällschraube zeigen. Um eine Vergleichung zwischen Gefäll- und Kreistachymeter zu erleichtern, mag deshalb im folgenden der früher schon benützte Wert $\mu_e = 0{,}214$ m zu Grunde gelegt werden. Er kommt einem Mittelwert der mit dem Reichenbachschen Entfernungsmesser gefundenen Werte nahe. Bei den geringen Fernrohrneigungen, für welche er gelten kann, spielt der Neigungsfehler noch gar keine Rolle. Das ergibt sich aus einer Auswertung nach Formel (20) des vorigen Abschnitts; denn nimmt man für μ_a selbst den hohen Betrag von 1' an, so verschwindet doch dessen Einfluß auf μ_e noch bei Höhenwinkeln von 10^0 und mehr. Man kann also genau genug $\mu_l = \mu_e : k = 0{,}00214$ m annehmen. Nach der Berechnung auf S. 98 ergibt sich dann ein Ablesefehler μ_a auf eine Länge von 100 m im Betrage von 1,5 mm, was einem Winkelwert $\mu_v = 3{,}1''$ entspricht.

Jene Rechnung setzt allerdings voraus, daß allgemein $\mu_O = \mu_U = \mu_a$ gesetzt werden darf. Beim Kipp-

tachymeter liegt diese Voraussetzung vor, weil O und U in gleichartiger Weise abgelesen werden. Beim Kreistachymeter ist es üblich, auf U „einzustellen" und nur bei O „abzulesen" oder umgekehrt. Gehen wir von dem auf S. 56 beschriebenen Voglerschen Verfahren aus, so wird keine besonders ausgebildete Einstellmarke verwendet, sondern es wird auf irgend eine Dezimetergrenze eingestellt. Dann aber ist es für die Größe von μ_a gleichgültig, ob eingestellt oder abgelesen wird, denn in beiden Fällen wird der Messungsfehler dadurch begangen, daß die Lage des Fadens zur Intervallstelle der Lattenteilung nicht richtig abgeschätzt wird. Aus den Abhandlungen von Reinhertz (Zeitschrift für Vermessungswesen 1894 S. 593) und Kummer (das. 1896 S. 225) geht nun übereinstimmend hervor, daß der Gesamtschätzungsfehler in der Intervallmitte am kleinsten, im ersten und letzten Viertel des Intervalls am größten ist, und daß er an den Intervallgrenzen etwa dem Mittelwert der Fehler auf allen Intervallstellen entspricht. Da diese Feststellungen auch hier zu Grunde gelegt werden können, so können auch μ_a und μ_v mit den früheren Beträgen verwendet werden.

Zur Auswertung der Formeln (20) und (23) bzw. (21) und (24) des vorigen Abschnitts werden noch geeignete Werte für den Neigungsfehler μ_α gebraucht. Er besteht aus mehreren Einzelfehlern, nämlich aus dem Betrag μ_L, um den die Alhidadenlibelle L (Fig. 11) nicht einspielt, ferner aus dem Betrag μ_n, um den der Höhenkreis falsch abgelesen wird und endlich aus dem Winkelwert μ_v, der dem Einstellungsfehler auf den Lattenpunkt M entspricht. μ_v kommt dem vorher ermittelten Wert gleich, kann also zu 3,1" angesetzt werden. Etwa ebenso groß kann μ_L selbst bei wenig günstigen Strah-

lungsverhältnissen in Rechnung gestellt werden. Wesentlich größer ist aber μ_n einzuschätzen mit Rücksicht darauf, daß Höhenkreise an Tachymetern gewöhnlich keine Nonien, sondern Indexstriche oder kleine Schätzmikroskope besitzen. Auf Grund von Versuchen an Indexstrichen gibt Jordan (Zeitschrift für Vermessungswesen 1899 S. 50) den Betrag von μ_n zu ungefähr $\pm 1'$ an. Reinhertz fand (das. 1902 S. 213) für Fennelsche Strichmikroskope den mittleren Fehler einer Richtungsmessung zu $\pm 12''$. Als zugehörigen Maximalfehler betrachtet er den Wert $\pm 1'$. Eine kleine theoretische Untersuchung kann zur Aufklärung nützen: Liest man nur volle Minuten ab, so ist jedenfalls der Maximalfehler (M*) mindestens gleich $\pm 30''$, falls nämlich gar keine zufälligen Schätzungs-, sondern nur absichtlich zugelassene Abrundungsfehler vorliegen. Alle Abrundungsfehler von 0 bis $\pm 30''$ haben gleiche Wahrscheinlichkeit für sich. Setzt man in (6,III) $\varphi(\varepsilon) = c$ und als Grenze für die Integrale den Maximalfehler (M) ein, so wird bekanntlich

$$(3) \qquad \mu^2 = \frac{c \int_0^{\mathfrak{M}} \varepsilon^2 \, d\varepsilon}{c \int_0^{\mathfrak{M}} d\varepsilon} = \frac{\mathfrak{M}^2}{3}$$

Für $\mathfrak{M} = 30''$ wird hier also $\mu_n = 17{,}3''$. Diese Rechnung ergibt übrigens denselben Betrag wie die von Reinhertz mitgeteilte Messung, wenn für diese der eigentliche Sichtfehler für horizontale Richtung zu Null angenommen wird. Bei sehr vielen Ablesungen kann μ_n offenbar nicht kleiner sein, als die vorstehende Rechnung

*) M = mittlerer Fehler für eilige Beobachtungen
(M) = Maximalfehler „ „ „

ergeben hat; wohl aber muß sich μ_n um den Einfluß des zufälligen Beobachtungsfehlers größer zeigen. Man kann deshalb mit großer Wahrscheinlichkeit annehmen, daß der aus der Summe der Quadrate von μ_L, μ_v und μ_n zu bildende Wert von μ_α nicht viel kleiner als rd. 20" angesetzt werden darf, und auch dieser Wert kann nur für Schätzmikroskope in Frage kommen. Bei weniger guten Ablesungsmitteln, also einfachen Indexstrichen, muß μ_α mindestens gleich 1' gesetzt werden, wie die Jordanschen Versuche zeigen. Aber auch dieser Fehler läßt sich praktisch nur innehalten, wenn das Instrument mit Alhidadenlibelle versehen ist, sodaß μ_L gegenüber μ_n vernachlässigt werden kann. Fehlt eine Alhidadenlibelle und wird eine Fernrohrlibelle verwendet, so sind nach S. 67/68 außer der Einstellung des Fernrohres und der Libelle noch zwei Ablesungen am Höhenkreis erforderlich. Dann ist also μ_n mit 1,4' statt mit 1' einzusetzen. Man wird indessen mit 2 Höhenkreisablesungen nur arbeiten, wenn das Instrument überhaupt keine Libelle parallel zur Kippebene des Fernrohrs besitzt. Beobachtungen ohne Fernrohrlibelle werden im folgenden Abschnitt behandelt werden.

Es sind unter Zugrundelegung der runden Werte von 20" und 1,5' für μ_α die Fehlerwerte μ'_e und μ'_h für verschiedene Neigungen aus den Formeln (20,III) und (23,III) berechnet und in der Tafel 6 zusammengestellt worden.

Nonienablesungen am Höhenkreis können die Fehlerwerte der 2. Spalte noch ermäßigen. Sie erfordern aber einen wesentlich größeren Zeitaufwand und sollen daher nicht empfohlen werden, da die aus der Zeile 2 sich ergebende Genauigkeit der Höhenmessung wohl für alle Zwecke tachymetrischer Messungen ausreicht.

Die Tafel 6 zeigt, daß μ'_e von μ_α nahezu unabhängig ist; auf μ'_h aber wirkt μ_α besonders in den geringen Neigungen stark ein. Der Ablesefehler μ_a beeinflußt μ'_e bei geringen Fernrohrneigungen mehr

Tafel 6. Fehlerwerte für sorgfältige Beobachtungen mit dem Kreistachymeter — ohne Lattenfehler —.

$e = 100$ m.

Einzelfehler	Formel des Abschn. III	$\alpha =$	0^0	$2^0\ 51{,}7'$ (1 : 20)	$5^0\ 42{,}7'$ (1 : 10)	10^0	20^0	30^0	Einheiten
$\mu_\alpha = 20''$; $\mu_r = 1{,}5'$	(20)	$\mu'_e =$	21	21	21	21	19	16 / 17	cm
$\mu_\alpha = 20''$; $\mu_r = 1{,}8$ cm	(23)	$\mu'_h =$	1,0	1,4	2,3	3,8	6,9	9,3	„
$\mu_\alpha = 1{,}5'$; $\mu_r = 1{,}8$ cm	(23)	$\mu'_h =$	4,4	4,5	4,8	5,6	8,0	9,9	„

als bei größeren; μ'_h dagegen beeinflußt er bei stärkeren Neigungen mehr als bei geringen.

C. Hammer-Fennelsches Reduktionstachymeter.

Genauigkeitsuntersuchungen über das Hammer-Fennelsche Tachymeter haben besonders Hammer, bzw. Heer und Koppe angestellt. (Zeitschrift f. Vermessungswesen 1902 S. 144 und 1903 S. 691). Sie haben übereinstimmend gefunden, daß der mittlere Längenfehler μ''_e gleich dem mit dem Reichenbachschen Distanzmesser erreichbaren, also gleich rund 0,2 % ist. Den mittleren Fehler μ''_h der Höhenmessung hat Koppe ungefähr doppelt so groß als bei dem Kreistachymeter erhalten, das als Vergleichsinstrument diente. Unter 44 Fehlern fand sich als größter ein solcher von 0,6 m. Die Höhenunterschiede betrugen etwa 15 m, die Entfernungen 100 m bis ausnahmsweise 400 m. Hammer teilt von einer durch Heer ausgeführten Messung mit, daß der größte Höhenfehler $\varepsilon''_h = 15$ cm, der mittlere $\mu''_h = \pm 6{,}3$ cm betragen habe. Die Höhenwinkel schwankten zwischen -27^0 und $+23^0$. Die Entfernungen waren kleiner als 120 m. Die Beobachtungspunkte bei den Vergleichsmessungen (in einem Steinbruchgelände) waren aber nicht durch Pflöcke oder dergleichen versichert, sondern nur durch ausgesteckte Zweige gekennzeichnet.

Beim Hammer-Fennelschen Reduktionstachymeter wird nicht wie bei den früher behandelten Instrumenten

an Fäden des Diaphragmas abgelesen. Die Ablesungsmittel sind vielmehr in zweierlei Weise neuartig: 1) Die Bilder der Entfernungs- und Höhenkurve gehen nicht über das Lattenbild hinweg; sie trennen also nicht das angezielte Lattenintervall, sondern lassen nur eine Ablesung etwa in der Weise zu wie Indexstriche. 2) Diese „Indexstriche" sind gekrümmt; ihre Schnittwinkel mit der Lattenteilung sind spitz. Aus den aufgeführten Genauigkeitsuntersuchungen von Hammer und Koppe muß man bereits schließen, daß der erste Punkt belangslos ist und daß auch der zweite bei den großen Schnittwinkeln der Entfernungskurve mit der Ablesekante // (Fig. 8) des Prismas keine wesentliche Rolle spielt; denn der Längenfehler hat sich wie beim Fadendistanzmesser mit festen Fäden ergeben. Wir können deshalb etwa $\mu''_e = 21{,}4$ cm für Entfernungen von 100 m setzen. Dieser Wert ist nach (26,III) für alle Fernrohrneigungen konstant. Wie weit der obenbezeichnete zweite Punkt die Höhenmessung beeinflußt, ist durch die vorliegenden Versuche noch nicht ausreichend geklärt. Durch den wesentlich spitzeren Schnittwinkel der Höhenkurve könnte immerhin eine Verringerung der Ablesungsgenauigkeit entstehen, zumal sich bei den Koppeschen Messungen recht große Höhenfehler gezeigt haben. Um diesen zweiten Punkt gesondert zu untersuchen, wird es gut sein, allgemein zu prüfen, ob und wie sich die Ablesungsgenauigkeit von Indexstrichen mit deren Richtung ändert. Diese allgemeine Frage läßt sich nicht allein an dem Hammer-Fennelschen Tachymeter prüfen.

Verf. hat eine derartige Untersuchung an einem scharfkantigen Maßstabe durchgeführt. Die Versuchsanordnung ist in Fig. 18 angedeutet. Der Maßstab *A* eines Rechenapparates besaß gleiche Intervalle

Fig. 18.

von 1,25 mm Breite. Neben ihm war der Nonius *B* mit einer Angabe von 1/10 Intervall in einer Führungsrille verschiebbar gelagert. Mit diesem Nonius wurde nun ein Kartenblatt *C* mit schrägen Indexstrichen, die Schnittwinkel von 90^0 bis 15^0 aufwiesen, fest verbunden. Der Nonius wurde längs eines Teilungsintervalls auf 20 gleich weit entfernte Intervallstellen mittels Lupe eingestellt. Die Einstellungen wurden in unregelmäßiger Reihenfolge durchgeführt und mehrfach auf Stunden und Tage unterbrochen aus Furcht davor, daß sonst die später vorgenommenen Beobachtungen durch die Erinnerung an die früheren beeinflußt werden könnten. Auch mit der Reihenfolge der Indexablesungen wurde gewechselt. Die Schnittwinkel der Indexstriche wurden weit über das unmittelbar vorliegende Bedürfnis variiert, weil sich dadurch leichter prüfen ließ, ob eine Gesetzmäßigkeit für das Wachstum des Ablesefehlers vorlag und worin sie bestand. An jedem Indexstrich wurden mit unbewaffnetem Auge 20 Ablesungen in der Sichtrichtung *MN*, d. h. so vorgenommen, daß *M* dem Körper zugekehrt war; 20 entsprechende Beobachtungen wurden in der umgekehrten Richtung vorgenommen. Dann wurde aus jeder Ablesung und der zugehörigen Einstellung des Nonius durch Subtraktion beider Beobachtungswerte der Abstand des betr. Zeigers vom Nullstrich des Nonius gebildet und aus je 20 zugehörigen Werten gleicher Sichtrichtung das Mittel gebildet. Aus den Differenzen λ dieser Mittel gegen die Indexablesungen derselben Sichtrichtung, also aus den wahrscheinlichen Ablesefehlern, wurden unter Vernachlässigung der geringen Ungenauigkeiten bei der Einstellung des Nonius die mittleren Ablesefehler nach der Formel

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\,\lambda]}{20-1}}$$

berechnet. Es ergaben sich die in nachfolgender Tabelle (Tafel 7) aufgeführten Werte μ in mm.

Bei der Rechnung zeigte sich, daß die Indexabstände bei der zweiten Beobachtungsreihe fast durchweg größer als bei der ersten ermittelt, daß also offenbar systematische, von der Sichtrichtung abhängende Ablesefehler begangen worden waren. In der letzten Zeile der vorstehenden Zahlentafel sind die halben Differenzen der ermittelten Zeigerabstände aufgeführt. Eine graphische Darstellung der Fehlerwerte nebst ausgleichenden Kurven zeigt Fig 19.

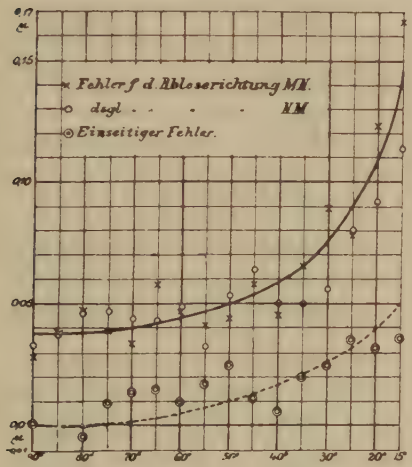


Fig. 19.

Die ermittelten Beträge lassen deutlich ein Anwachsen des Ablesefehlers mit der Verkleinerung des Schnittwinkels der Indexstriche erkennen und zwar vergrößert sich der Ablesefehler stärker als die Gradanzahl der Schnittwinkel abnimmt. Es liegt nahe, das Wachstum des Ablesefehlers theoretisch aus der Vergrößerung der Strichseite zu erklären. mit welcher ein schräger Indexstrich unmittelbar der Ablesekante des Maßstabes anliegt. Wird die Strichstärke mit d und der Schnittwinkel des Indexstriches gegen den

Tafel 7. Mittlere Ablesefehler bei Benutzung schräger Indexstriche.

Neigung des Indexstriches	μ f. d. Sichtrichtung *M N*	μ f. d. Sichtrichtung *N M*	Halbe Differenz der ermittelten Zeigerabstände
90°	0,028	0,033	+ 0,001
85	0,038	0,038	+ 0,002
80	0,047	0,046	— 0,004
75	0,039	0,047	+ 0,009
70	0,034	0,044	+ 0,014
65	0,058	0,043	+ 0,015
60	0,047	0,049	+ 0,010
55	0,041	0,032	+ 0,017
50	0,044	0,053	+ 0,025
45	0,058	0,064	+ 0,011
40	0,045	0,050	+ 0,006
35	0,065	0,050	+ 0,020
30	0,089	0,056	+ 0,025
25	0,078	0,080	+ 0,035
20	0,123	0,092	+ 0,032
15	0,166	0,114	+ 0,036

Maßstab mit ν bezeichnet, so liegt längs des letzteren die schräge Strichseite

$$d_1 = d \cdot \operatorname{cosec} \nu$$

Auch die aufgefundenen mittleren Ablesefehler wachsen nahezu mit der Cosekante der Schnittwinkel der Indexstriche, wie die obere, nach dem Cosecansgesetz

(4) $$\mu'_a = \mu_a \cdot \operatorname{cosec} \nu$$

eingetragene Ausgleichlinie in Fig. 19 erkennen läßt. Eine strenge Ausgleichung der Beobachtungen kann das Ziel der vorliegenden Arbeit nicht fördern, weil ein allgemeines Gesetz über Beobachtungsfehler nur auf Grund sehr vieler, von verschiedenen Beobachtern angestellter Beobachtungen hergeleitet werden kann. Die systematischen Fehler, die in der letzten Spalte der Tafel 7 aufgeführt sind, lassen sich dadurch erklären, daß Verf. bei den schrägen Strichen nicht in der Mitte der dem Maßstab anliegenden Strichseite, bzw. in der Verlängerung der Schnittmitte, sondern näher dem jeweils vorderen Rande der schrägen Strichseite abgelesen hat. Für die ermittelten systematischen Fehler erscheint aber das Cosecansgesetz zu ungünstig. Die untere Ausgleichlinie der Fig. 19 ist nur nach dem Augenmaß eingetragen worden.

Die vorstehende Untersuchung über die Ablesungsgenauigkeit an schrägen Indexstrichen kann selbstverständlich nicht den Zweck haben, die Ablesungsgenauigkeit an der Höhenkurve beim Hammer-Fennelschen Tachymeter sicher zu bestimmen, wohl aber kann sie einen Beitrag zur Erklärung der beobachteten mittleren Höhenfehler liefern. Auch bei diesem Tachymeter werden die Lattenablesungen an schrägen, oder besser gesagt, gekrümmten Indexstrichen vorgenommen. (Fig. 8)

Die durch die jeweilige Tangentenrichtung gekennzeichneten Schnittwinkel der Indexkurven sind verschieden und hängen vom Höhenwinkel α ab (Fig. 12). Ist ν der Schnittwinkel und r der Radius vector der Kurve, so ist nach bekanntem Satz:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{r\, d\alpha}{dr}$$

Wenn der Radius des Grundkreises KO, der auch der Radius des Bildkreises G ist, mit a bezeichnet wird, so ist für die Entfernungskurve unter Berücksichtigung von (31,I) auf S. 36:

$$r_e = a + p_e = a + \frac{f \cos^2 \alpha}{k + \sin \alpha \cos \alpha}$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{dr_e}{d\alpha} = \frac{-\frac{1}{2} f (2k \pm \sin 2\alpha) \sin 2\alpha \mp f \cos^2 \alpha \cos 2\alpha}{(k \pm \sin \alpha \cos \alpha)^2}$$

und

$$\operatorname{tg} \nu_e = \frac{\frac{a}{2}(2k \pm \sin 2\alpha)^2 + f(2k \pm \sin 2\alpha) \cos^2 \alpha}{-f(2k \pm \sin 2\alpha) \sin 2\alpha \mp 2f \cos^2 \alpha \cos 2\alpha} \tag{5}$$

Entsprechend findet sich für die Höhenkurve unter Benutzung von (32,I)

$$r_h = a + \frac{f \sin \alpha \cos \alpha}{m \pm \sin^2 \alpha}$$

$$\frac{dr_h}{d\alpha} = \frac{f(m \pm \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \mp 2f \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{(m \pm \sin^2 \alpha)^2}$$

$$(6) \qquad \operatorname{tg} \nu_h = \frac{a(m \pm \sin^2\alpha)^2 + \frac{f}{2}\sin 2\alpha\,(m \pm \sin^2\alpha)}{f(m \pm \sin^2\alpha)\cos 2\alpha \mp \frac{f}{2}\sin^2 2\alpha}$$

Bei der Herstellung dieses Tachymeters ist $a = 30$ mm, $f = 334{,}8$ mm, $k = 100$, $m = 20$ festgelegt. Durch Einsetzung dieser konstanten Werte in die Formeln (5) und (6) haben sich aus Rechnungen mit dem Rechenschieber die in der folgenden Tafel aufgeführten Schnittwinkel ergeben:

Tafel 8. Schnittwinkel der Indexkurven gegen die Ablesekante beim Hammer-Fennelschen Tachymeter.

α	ν_e		ν_h	
−30°	84°	54'	76°	46'
−20	86	19	69	46
−10	88	05	64	23
−5	89	03	62	20
0	89	56	60	51
+5	88	57	62	23
+10	87	59	64	31
+20	86	15	70	26
+30	84	54	77	56

Die Tafel 8 zeigt, daß die Schnittwinkel der Entfernungskurve mit α ein wenig abnehmen, die der Höhenkurve aber mit α stark wachsen. Wendet man einmal

die Formel (4) auf die Ablesungsgenauigkeit an, so wird der Ablesefehler μ_{ea} an der Entfernungskurve durch die großen Schnittwinkel ν_e garnicht und der Ablesefehler μ_{ha} an der Höhenkurve nur wenig beeinflußt; denn unter Zugrundelegung von $\mu_a = 1{,}5$ mm würde sich für kleine Höhenwinkel $\mu_{ha} = 1{,}7$ mm und für große nur $\mu_{ha} = 1{,}55$ mm ergeben.

Die Einstellung auf den als weißes, scharf markiertes Intervall ausgebildeten Lattennullpunkt läßt sich wie jede Einstellung auf eine Intervallmitte genauer ausführen als eine Ablesung an beliebiger Stelle. Der zu befürchtende Einstellfehler möge μ'_a genannt werden. Für das Verhältnis $\mu_a : \mu'_a$ fand Reinhertz (Zeitschrift für Vermessungswesen 1894 S. 623) den Wert 2,0, Volkmann (das. 1895 S. 9) den Wert 1,7. Aus dem von Kummer (das. 1897 S. 260) mitgeteilten Werten seiner Beobachtungsfehler auf größeren Zielweiten von 60-120 m hat Verf. das Verhältnis $\mu_a : \mu'_a = 1{,}6$ berechnet. Für μ_a wollen wir den bisher verwendeten Wert von $\pm 1{,}5$ mm auf $e = 100$ m beibehalten. Wählen wir mit Rücksicht auf jene Beobachtungen über das Verhältnis $\mu_a : \mu'_a$ für μ'_a den runden Wert von 1,0 mm, so ergibt sich rechnerisch für den Höhenabschnitt l_h an der Latte bei geringeren Höhenwinkeln ein mittlerer Fehler

$$\mu_{lh} = \sqrt{1{,}7^2 + 1{,}0^2} = 2{,}0 \text{ mm},$$

was bei der Höhenkonstanten $m = 20$ einem Höhenfehler von 4 cm entspricht. Nimmt man noch einen mittleren Neigungsfehler der Sicht $\mu_L = 50''$ an, so findet sich bei geringer Fernrohrneigung aus (28,III) auf S. 84 für 100 m Entfernung ein Höhenfehler $\mu'_h = 4{,}7$ cm.

Bei den größten Fernrohrneigungen wird $\mu''_h = 4{,}4$ cm, Unter den gewählten Voraussetzungen sind also die Höhenfehler fast unabhängig von der Fernrohrneigung. Der Mittelwert von 4,6 cm weicht nicht bedeutend von dem durch Hammer aus den Heerschen Beobachtungen ermittelten ab. Weitere Beobachtungen zur Feststellung mittlerer Höhenfehler aus praktischen Messungen würden zur völligen Klärung der Frage von Nutzen sein.

Den bisherigen Fehlerberechnungen ist das Maß $\mu_e = 0{,}214$ m für $e = 100$ m zugrunde gelegt worden. Es enthält bereits die Einflüsse geringer Lattenneigungen, wie sie beim Gebrauch der Dosenlibelle entstehen. Es ist indessen mittels des Gefälltachymeters aus Streckenmessungen mit sehr geringen Fernrohrneigungen ermittelt und gilt auch für die anderen Tachymeter nur in Bezug auf geringe Fernrohrneigungen. Bei diesen beeinflußt, wie die Zahlentafel 4 auf Seite 77 erkennen läßt, die Lattenneigung nur unwesentlich den Entfernungsfehler μ_e. Da nun das zugrunde gelegte Fehlermaß $\mu_e = 0{,}214$ m überhaupt nur die Bedeutung eines Durchschnittsbetrages hat, so kann auch der geringe Einfluß, den fehlerhafte Lattenneigung zu seinem Entstehen beigetragen hat, vernachlässigt werden. Es können dann Gesamtfehler für die verschiedenen Fernrohrneigungen unter besonderer Berücksichtigung der Lattenneigung ausgewertet werden (Tafel 9). Ohne diese Berücksichtigung würden die Entfernungs- und Höhenfehler bei größeren Fernrohrneigungen viel zu klein erscheinen. Die Größe der mittleren Lattenneigungsfehler wird, wie auf S. 78 mitgeteilt, von verschiedenen Fachleuten recht verschieden angegeben. Versuchsrechnungen des Verf. zur Abtrennung des mittleren Lattenneigungsfehlers vom Gesamtlängenfehler haben auch recht verschiedene Ergebnisse gezeitigt. Für die von Friedrich (Das optische Distanzmessen S. 84) mit-

geteilte Versuchsreihe ergaben sich z. B. durch solche Rechnungen Lattenneigungen von etwa 1:70 bis 1:250. Die Mitteilung der Rechnungen dürfte sich erübrigen. Die Unterschiede in den Anschauungen und Rechnungsergebnissen können bei der Ungleichmäßigkeit des Arbeitermaterials auch nicht Wunder nehmen. Es möge zur Berechnung der folgenden Tabelle eine mittlere Lattenneigung von 1:150 angenommen werden. Sie paßt etwa zu der obigen Nachrechnung aus Beobachtungen und steht auch mit der Jordanschen Ansicht im Einklang. Für die Lattenneiguug 1:150 ergeben sich Entfernungs- und Höhenfehler im doppelten Betrage derjenigen, die in Zeile 1 der Tabelle 4 auf S. 77 angegeben sind. Nach den Ausführungen auf S. 75 sind für das Gefälltachymeter die größeren Werte $\triangle' e$ und $\triangle' h$ der Berechnung zugrunde gelegt.

Zur Ermittlung vergleichbarer Gesamtfehler ist auch für das Hammer-Fennelsche Reduktionstachymeter der Entfernungsfehler $\mu''_e = 21{,}4$ cm angenommen worden, ebenso wie für die anderen Instrumente. Für das Kreistachymeter mußten noch die bei der üblichen Ausrechnung der Höhen nicht zu vermeidenden Rechenfehler berücksichtigt werden. Mit Bezug auf S. 58 wird ein mittlerer Rechenfehler $\mu_r = \pm 1{,}8$ cm in Ansatz gebracht. Die Gesamtfehler der Entfernung ergeben sich für alle drei Tachymeter zu $\sqrt{\mu_e^2 + \mu^2_{te}}$, wenn μ_{te} den Einfluß der Lattenneigung auf die Längenmessung darstellt. Die Gesamthöhenfehler für das Gefäll- und Reduktionstachymeter sind aus $\sqrt{\mu_h^2 + \mu^2_{th}}$ und aus $\sqrt{\mu'^2_h + \mu^2_{th} + \mu^2_r}$ für das Kreistachymeter berechnet worden; μ_{th} soll in diesen Formeln den Einfluß der Lattenneigung auf die Höhenmessung bezeichnen. Die beiden Spalten mit den Gesamthöhenfehlern für das Gefäll- und Kreistachymeter

sind mit Hilfe der beiden zugehörigen Zeilen aus den Tafeln 5 und 6 gebildet. Zur Berechnung von Höhenfehlern für das Reduktionstachymeter mußte ein kleinerer Wert als der von Hammer aus den Heerschen Beobachtungen ermittelte von 6,3 cm angenommen werden, weil in diesem Wert noch Ungenauigkeiten der geprüften Punkthöhen selbst enthalten sind. Es ist daher als Beispiel von dem oben rechnerisch ermittelten Höhenfehler $\mu''_k = 4{,}6$ cm ausgegangen worden. Durch die beigefügte Klammer soll die Unsicherheit der Werte gekennzeichnet werden.

Tafel 9. Mittlere Gesamtfehler der Entfernungs- u. Höhenmessung für sorgfältige Beobachtungen. $e = 100$ m.

Neigungswinkel α	Längenfehler in cm			Höhenfehler in cm				
	Gefälltachymeter	Kreistachymeter	Reduktionstachymeter	Gefälltachymeter		Kreistachymeter		Reduktionstachymeter
0 °	21	21	21	0,2	0,2	2,1	4,8	(4,6)
2 ° 51,7' (1 : 20)	24	22	22	1,4	1,9	2,3	4,8	(4,6)
5 ° 42,7' (1 : 10)	29	23	23	3,0	3,9	3,0	5,1	(4,6)
10 °	—	25	25	—	—	4,7	6,2	(5,0)
20 °	—	33	34	—	—	11,3	12,0	(9,9)
30 °	—	43	45	—	—	24,1	24,4	(22,7)

Alle Fehlerwerte wachsen nahezu im gleichen Verhältnis mit den Längen. Die Zahlen der Tafel 9 können

deshalb als Prozente der Strecken- und Höhenfehler angesehen werden. Da nur zufällige Fehler berücksichtigt sind, so können die dreifachen Beträge als Maximalfehler der Aufmessung, d. h. als Fehler des 370sten Falles gelten. Es ergibt sich dann, daß für größere Fernrohrneigungen oft größere Höhenfehler als 30 cm auf Entfernungen von 100 m vorkommen, daß sich also selbst mit genauen Beobachtungen die von einigen Eisenbahndirektionen festgesetzten Maximalfehler nur mit Verwendung kurzer oder flach geneigter Sichten innehalten lassen, zumal nach den Ausführungen der Einleitung zu beachten ist, daß zu den in Taf. 9 angegebenen Messungsfehlern noch die unvermeidlichen Fehler bei der Auswahl der Geländeeckpunkte treten. Liegen große Geländeneigungen über etwa 30° vor, so lassen sich die Höhenfehler der Tafel 9 nicht mehr innehalten, weil dann die angegebenen Längenfehler besonders bei großen Fernrohrneigungen schon größere Höhenfehler erzeugen, als Taf. 9 angibt. Die wirklich vorhandenen Höhenfehler müssen dann mit Bezug auf Formel (1) der Einleitung aus

$$\mu_h = \mu_e \operatorname{tg} \nu \tag{7}$$

berechnet werden.

Da bekanntlich, wie es auch die Beträge der Längenfehler erkennen lassen, die Tachymetrie für genaue Flachmessung im allgemeinen nicht ausreichend erscheint, so braucht die Richtungsbestimmung nicht mit großer Schärfe durchgeführt zu werden. Zumeist genügt auch für sorgfältige Messungen eine Indexablesung ohne Benutzung des Nonius. Man muß sich dann mindestens auf einen mittleren Richtungsfehler von 1' gefaßt machen. Beim Gebrauch eines Fennelschen Strichmikroskops wird dieser Mittelwert nur etwa 18" betragen; die entsprechenden

Querfehler sind 3 bzw. 1 cm auf die Entfernung von 100 m.

Durch die Genauigkeitsmaße für den Längen-, Quer- und Höhenfehler wird der „Wahrscheinlichkeitskörper" um den Aufnahmepunkt herum festgelegt. Die Dichte dieses Körpers entspricht an jeder Stelle der dort geltenden Fehlerhäufigkeit. Da letztere durch das Gaußsche Fehlergesetz ausgedrückt werden kann, so findet sich bekanntermaßen gleiche Dichte des Wahrscheinlichkeitskörpers, oder, was dasselbe sagt, es finden sich gleich wahrscheinliche Punktlagen auf den Schalen ähnlicher und ähnlich gelegener Fehlerellipsoide. Die drei Hauptachsen dieser Ellipsoide liegen in der Richtung der Sicht, in der Wagerechten quer dazu und in der Normalen auf beiden Richtungen. Bei geringen Fernrohrneigungen geben die Maximalfehler die Längen der Hauptachsen desjenigen Fehlerellipsoides an, das der Wahrscheinlichkeit 1:370 entspricht. Wie in der Einleitung hervorgehoben wurde, genügt es im allgemeinen, die Aufnahmegenauigkeit nur nach dem Entfernungs- (Lage-) und Höhenfehler zu beurteilen. Man betrachtet dann statt des langgestreckten Fehlerellipsoides das umhüllende Rotationsellipsoid mit der Rotationsachse $\mathfrak{M}_h$ und dem Halbmesser $\mathfrak{M}_e$ des größten Schnittkreises. Dieses Rotationsellipsoid ist stark abgeplattet und kann zu vorläufigen Genauigkeitsschätzungen in ausreichender Annäherung als Zylinder mit $\mathfrak{M}_e$ als Grundkreishalbmesser und $2\,\mathfrak{M}_h$ als Höhe angenommen werden. Die ungenaueste Lage des statt des wirklichen Punktes betrachteten Aufnahmepunktes wird dann durch die Umfänge der Zylindergrundkreise gekennzeichnet. Bei größeren Fernrohrneigungen sind die Genauigkeitsschätzungen wegen der Unsicherheit des Lattenneigungsfehlers besonders unsicher. Deshalb genügt auch dann noch die Benutzung des entsprechenden

Fehlerzylinders, obwohl er nur noch in roher Annäherung als Darstellung einer Punktlage bestimmter Wahrscheinlichkeit gelten kann.

Abschnitt V.

Mittlere und maximale Fehlerwerte für die drei Tachymeterarten bei eiligen Beobachtungen.

Eilige Beobachtungen sollen möglichst schnellen Arbeitsfortschritt ermöglichen. Bei allen Tachymeterbeobachtungen kann man allein schon dadurch wesentliche Zeitersparnisse erzielen, daß man an der Latte nur volle Centimeter abliest. Man erspart dann die Ablesung und Aufschreibung bzw. die sonstige Festlegung der Millimeterziffern, d. h. etwa eines Viertels sämtlicher Zahlen. Je nach der Einrichtung des Tachymeters läßt sich ferner noch Zeitgewinn durch Zulassung geringer Neigungsfehler erzielen. Die Messung wird dann weniger sorgfältig. Man läßt absichtlich größere Einzelfehler für die Lattenablesung und Libelleneinstellung zu und muß selbstverständlich auf größere Endfehler bei der Entfernungs- und Höhenermittelung gefaßt sein. Über die dabei zu erreichende Genauigkeit kann man sich nur unter Berücksichtigung der Fehlerwahrscheinlichkeit Aufschluß verschaffen.

Zur Berechnung der mittleren Endfehler genügt es, die Wahrscheinlichkeit des Auftretens und die Größe der Fehleranteile oder Einzelfehler zu bestimmen. Dann lassen sich die mittleren Beträge der Fehleranteile

berechnen und nach der Fehleranhäufungsregel zu den gesuchten mittleren Endfehlern der Entfernungs- und Höhenmessung vereinigen. Zur Berechnung der maximalen Endfehler genügt diese Regel nicht ohne weiteres. Es muß vielmehr die Wahrscheinlichkeit $\varphi(\varepsilon)$ für das Auftreten der Endfehler selbst ermittelt werden. Dann kann nach den Erörterungen auf S. 80—82 auch für eilige Beobachtungen derjenige Endfehler als Maximalfehler gelten, dessen Überschreitung eine geringere Wahrscheinlichkeit als 0,0027 für sich hat.

Berechnungsformeln.

Beim Gefälltachymeter beeinflussen nach den Formeln (10) und (12) des III. Abschnitts die Beobachtungsfehler ε_O und ε_U bzw. ε_l sowie auch ε_o und ε_u gemeinsam die Längen- und Höhenmessung, während ε_w nur auf den Höhenfehler allein wirkt. Von den Lattenablesungsfehlern tritt der k-fache bzw. der m-fache Betrag auf, von den Schraubeneinstellungsfehlern dagegen der sehr viel größere $\frac{k \cdot e}{d}$ fache bezw, der $\frac{m \cdot e}{d}$ fache Betrag. Es ist deshalb nicht zweckmäßig, etwaige zufällige oder systematische Schraubeneinstellungsfehler noch durch absichtlich zugelassene zu vergrößern. Auch beansprucht die genaue Einstellung der Gefällschraube kaum mehr Zeit als die genäherte. Bei eiligen Messungen sind nun ε_O und ε_U bzw. ε_l wesentlich größer als bei sorgfältigen Messungen. Jenen größeren Lattenablesungsfehlern gegenüber können die geringen zufälligen Schraubeneinstellungsfehler unbedenklich vernachlässigt werden. Etwaige systematische Schraubeneinstellungsfehler gehören nicht in diese Betrachtung. Gilt jene geringe Vernachlässigung, so hängt

nach Formel (10, III) der Entfernungsfehler ε_e nur noch vom Fehler ε_l des Lattenabschnittes ab. Für eilige Messungen mit den Gefälltachymeter ergeben sich daher aus (11) und (13) des Abschnitts III die Gleichungen:

(1) $$M_e = k \cdot M_l$$

(2) $$M_h^2 = (2m^2 + 2m + 1) M_a^2 + e^2 M_L^2$$

Wird nun mit den oben bezeichneten Vernachlässigungen ε_l zum Maximalfehler, so wird es offenbar auch ε_e. Daher ergibt sich aus (10, III):

(3) $$\mathfrak{M}_e = k \mathfrak{M}_l$$

Der Höhenfehler ε_H hängt außer von ε_l bzw. ε_O und ε_U noch von der fehlerhaften Neigung ε_w ab. Sein Maximalwert $\mathfrak{M}_H$ müßte also aus der Wahrscheinlichkeit des Gesamtfehlers ε_H ermittelt werden. Man kann jedoch $\mathfrak{M}_H$ besser aus der einfachen Formel

(4) $$\mathfrak{M}_H = 3 M'_H$$

ausrechnen, die später erklärt werden soll.

Vom Längenfehler beim Kreistachymeter hat sich schon im Abschnitt IV ergeben, daß er durch den Neigungsfehler nahezu garnicht beeinflußt wird. Noch mehr als bei sorgfältigen äußert sich diese Erscheinung bei eiligen Beobachtungen, weil bei diesen der Lattenabschnittsfehler noch mehr überwiegt. Hier können daher die 2. Glieder

der Formeln (19) und (20) des III. Abschnitts vernachlässigt werden. Statt (20) ergibt sich dann:

(5) $$M'_e = k \cdot \cos^2 \alpha \cdot M_l.$$

Aus (23) folgt unmittelbar:

(6) $$M'^2_h = \frac{k^2}{4} \sin^2 2\alpha \cdot M'^2_l + e^2 (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 M_\alpha^2$$

Entsprechend findet sich, falls Rechenfehler nicht berücksichtigt werden, unter den obigen Voraussetzungen der Maximalfehler

(7) $$\mathfrak{M}'_e = k \cos^2 \alpha \cdot \mathfrak{M}'_l$$

Den maximalen Höhenfehler berechnet man, wie später nachgewiesen werden soll, genau genug nach der einfachen Formel:

(8) $$\mathfrak{M}'_h = 3 \cdot M'_h + e M_L$$

Für das Reduktionstachymeter können M''_e und $\mathfrak{M}''_e$ aus den entsprechenden, soeben abgeleiteten Formeln (1) und (3) berechnet werden. Die Höhenfehler folgen aus (28) und (27) des Abschnittes III und zwar ist

(9) $$M''^2_h = m^2 \cdot M^2_{lh} + e^2 M^2_L$$

und genau genug

(10) $$\mathfrak{M}''_h = 3 m M_{lh} + e \cdot \mathfrak{M}_L$$

Zu allen vorstehend aufgeführten Fehlermaßen treten noch die Lattenneigungsfehler $\triangle e$ und $\triangle h$ bzw. für das Gefälltachymeter $\triangle' e$ und $\triangle' h$ hinzu. Als mittlere Werte dieser Fehler sollen wiederum wie auf S. 118 die doppelten Beträge der ersten Zeile von Tafel 4 eingeführt werden.

Mittlere Fehlerwerte.

Alle mittleren Endfehler hängen vom mittleren Lattenablesungsfehler M_a ab. Dieser mag daher zuerst bestimmt werden. Werden an einer Lattenstelle, z. B. bei O, nur Centimeter abgelesen, so können außer den bisher behandelten Schätzungsfehlern noch Abrundungsfehler ε_c von 0 bis ± 5 mm vorkommen. Die Schätzungsfehler sind unbeabsichtigt und werden verursacht durch Refraktion, durch Bestrahlung des Instruments, Windstöße gegen dasselbe, nicht vollständig beseitigte Parallaxe, persönliche Einflüsse usw. Alle diese Ursachen veranlassen den Beobachter am Instrument, den Faden gleichsam um die Größe ε_u fälschlich an einer anderen Lattenstelle zu erkennen, als er unter erwünschten, absolut günstigen Verhältnissen befunden werden müßte. Von dem Zahlenmaß der derart fehlerhaft erkannten Lattenstelle werden die höheren Stellen absichtlich fallen gelassen. Für eine bestimmte Zielweite ist die Häufigkeit des Auftretens eines unbeabsichtigten Schätzungsfehlers ε_u unbekannt, kann aber durch das Gaußsche Fehlergesetz (6,III) ausgedrückt werden. Die Häufigkeit eines Abrundungsfehlers ε_c allein ohne Rücksicht auf Schätzungsfehler ε_u ist offenbar für alle Fehler gleich groß u. gleich c anzunehmen, da der Faden mit gleicher Wahr-

scheinlichkeit jede einzelne Lattenstelle treffen kann. Der mittlere Ablesungsfehler M_a für eilige Beobachtungen setzt sich nach Vorstehendem aus zwei voneinander unabhängigen Ursachen zusammen. Es wird daher, wenn μ_c den mittleren Abrundungsfehler und wie bisher μ'_a den mittleren Schätzungsfehler nahe der Intervallmitte bezeichnet:

(11) $$M_a^2 = \mu_c^2 + \mu'^2_a$$

Hierin wird μ_c nach Formel (3, IV, S. 105) berechnet aus $\mathfrak{M} : \sqrt{3}$, wobei der maximale Abrundungsfehler $\mathfrak{M}$ gleich der Hälfte des Intervalls, d. h. gleich 5 mm, zu setzen ist. Daher findet sich $\mu_c = 2{,}89$ mm. Wird wieder, wie auf S. 116, für μ'_a der Wert 1,0 mm eingesetzt, so ergibt sich der auf eine Entfernung von 100 m geltende Wert $M_a = 3{,}05$ mm. Für das Reduktionstachymeter soll wegen des spitzen Schnittwinkels der Höhenkurve $M''_a = 3{,}1$ mm gesetzt werden.

Bei den Beobachtungen mit dem Gefälltachymeter ist $M_l^2 = 2\,M_a^2$, weil O und U in gleicher Weise abgelesen werden. Da mit dem Kreistachymeter U eingestellt wird, so ist $M'^2_l = \mu_a^2 + M_a^2$, worin nach S. 103/104 für μ_a der Wert 1,5 mm einzusetzen ist. Beim Reduktionstachymeter könnte wohl wegen der Einstellung auf eine besondere Intervallmarke $M'^2_{le} = \mu'^2_a + M_a^2$ gesetzt werden; dann aber würden sich für dieses Instrument kleinere Fehlerwerte als für das Kreistachymeter ergeben und dazu geben die bisher veröffentlichten Beobachtungsergebnisse keine Veranlassung. Es soll daher auch für das Reduktionstachymeter der Wert M'^2_l beibehalten werden, zumal er nur

unbedeutend von dem sonst in Betracht kommenden Wert $M''_{le}{}^2$ abweichen würde.

Die Einsetzung der Zahlenbeträge liefert in Millimetereinheiten $M_l = 4{,}3$; $M'_l = 3{,}4$. Mit diesen Werten sind M_e und M_e' aus (1) und (5) berechnet; die Ergebnisse sowie auch die durch Zusammenfügung mit $\triangle'_e$ bzw. $\triangle_e$ entstandenen Werte sind in der folgenden Tafel 10 niedergelegt worden.

Die Höhenfehler hängen außer von M_O und M_U noch wesentlich von dem Neigungsfehler M_L bzw. M_α ab. Betreffs dieser fehlerhaften Neigungen müssen nach den Ausführungen auf S. 71 die drei Tachymeter gesondert behandelt werden. Beim Kreistachymeter besteht nach S. 104 M_α aus 3 Anteilen. Falls eine Alhidadenlibelle vorhanden ist, läßt sich jeder dieser Fehleranteile bequem bis auf einen geringen Rest beseitigen. Wir können deshalb für diesen Fall auch bei Betrachtung eiliger Beobachtungen denselben Einzelwert von 20" für M'_α der Berechnung von M'_h zugrunde legen, den wir für μ'_α verwandt haben. Beim Gefälltachymeter kann M_L nur durch ständige Benutzung der Schraube auf geringer Höhe gleich μ_L erhalten werden. Man wird oft durch Vermeidung des Schraubens Zeit ersparen können, besonders wenn man Punkte unter nahezu gleichen Neigungswinkeln aufnimmt. Dann aber können leicht größere Stehachsenneigungen σ schädlich wirken. Sie beeinflussen nach (1,III) die Höhenmessung, müssen also bei Bemessung von M_L berücksichtigt werden. Beim Gebrauch eines berichtigten Reduktionstachymeters rührt M_L allein und beim Gebrauch eines Kreistachymeters ohne Alhidadenlibelle rührt M_L großenteils von einer Stehachsenneigung σ her und kann aus (1,III) berechnet werden. Die Steh-

achsenneigung läßt sich nur bis zu einem gewissen Grade durch wiederholte Horizontierung des ganzen Instrumentes vermeiden.

Die Entstehung der Libellenfehler und die Häufigkeit ihres Vorkommens hängen nun wesentlich vom Verhalten des Beobachters ab. Bei allen Tachymetern, die keine Alhidadenlibelle haben, sollte zu Beginn der Beobachtung die Stehachse streng lotrecht gestellt werden. In Ermangelung einer anderen kann das mit der Fernrohrlibelle geschehen. Die lotrechte Lage der Stehachse ändert sich dann aber ohne Zutun des Beobachters infolge verschiedener äußerer Einflüsse, wie z. B. der Nachgibigkeit des Bodens, der ungleichmäßigen Sonnenbestrahlung und Ausdehnung der Stativbeine, der Handhabung des Instruments usw. Nimmt nun der Beobachter ohne Gebrauch der Röhrenlibelle solange eilige Aufmessungen vor, bis er an der Dosenlibelle eine Veränderung der Stehachse erkennt, so muß er sich bei ständiger Anwendung dieses Verfahrens mindestens auf Stehachsenneigungen in solcher Größe und Anzahl gefaßt machen, wie sie bei der Lotrechtstellung der Stehachse durch die Dosenlibelle vorkommen. Hat aber der Beobachter genauere Kreuzlibellen auf der Horizontalalhidade zur Verfügung, so wird er gegebenenfalls eilige Beobachtungen solange fortsetzen, bis er an den Kreuzlibellen erkennt, daß die Stehachse eine bestimmte fehlerhafte Neigung $\mathfrak{M}_L$ erhalten hat. Das zweite Verfahren läßt sich offenbar mit Dosenlibellen nicht anwenden, da dieselben nur geringe Empfindlichkeit und keine geeigneten Marken zur sicheren Ablesung der Neigung besitzen. Je nach der Wahl des Beobachtungsverfahrens wird der Beobachter verschiedene mittlere Neigungsfehler begehen.

Es mögen nun die bei den beiden geschilderten Beobachtungsverfahren zu erwartenden mittleren Werte

M_{L1} und M_{L2} aller Sichtneigungen ν bei verschiedenen Stehachsenneigungen σ bestimmt werden. Stehachse und Sicht werden als justiert, d. h. rechtwinklig zueinander stehend angenommen. Wir haben Formel (6,III S. 79) zu benutzen und daher zunächst $\varphi(\nu)$ zu ermitteln. Jedes ν hängt nach Formel (1,III S. 71) von der augenblicklichen Stehachsenneigung σ und dem Richtungswinkel β ab, den die Sicht mit der lotrechten Ebene durch die Stehachse bildet. Bei sehr vielen Beobachtungen ist offenbar jeder Winkel β gleich wahrscheinlich, d. h. $\varphi(\beta) = c$. Nehmen wir vorübergehend den Wert von σ als konstant an, so ändert sich ν verhältnisgleich mit sin β. Die Sichtneigung ändert sich also nahe bei N (Fig. 14) viel schneller als bei M. Die absolut größeren Fehler ν treten häufiger auf als die absolut kleineren. Jeder Zwischenwert von ν zwischen 0 und σ tritt in zwei benachbarten Quadranten $2c$ mal positiv und in den beiden anderen $2c$ mal negativ auf. Er wird je nach den Einheiten, in denen er gemessen wird, innerhalb eines größeren oder kleineren Winkels $\triangle\beta = \triangle$ arc sin $\frac{\nu}{\sigma}$ begangen. Irgend ein Wert ν zwischen den Endwerten 0 und σ kann bei einer Beobachtung zweimal innerhalb aller vier Quadranten vorkommen. Das Verhältnis $\varphi'(\nu)$ der ein bestimmtes ν erzeugenden Fälle zur Anzahl aller überhaupt irgend ein ν erzeugenden Fälle bei konstantem σ ist also auch das Verhältnis von $2c \cdot \triangle\beta$ zu $2c \cdot \pi$, sodaß

$$(12) \qquad \varphi'(+\nu) = \frac{\triangle \text{ arc sin } \frac{\nu}{\sigma}}{\pi} = \varphi'(-\nu)$$

Nimmt man das Intervall unendlich klein an, so wird

$$\varphi'(+v) = \frac{d \arcsin \frac{v}{\sigma}}{\pi} = \frac{d\left(\frac{v}{\sigma}\right)}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{v}{\sigma}\right)^2}}$$

Dafür läßt sich schreiben:

(13) $$\varphi'(+v) = \frac{d\,v}{\pi \sqrt{\sigma^2 - v^2}} = \varphi'(-v)$$

Bei konstanter Stehachsenneigung σ ist der mittlere Betrag aller Sichtneigungsfehler v aus (6,III) zu berechnen Der Nenner ist gleich 1/2. Daher wird:

$$M_v^{\,2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sigma} \frac{v^2\, d\,v}{\sqrt{\sigma^2 - v^2}} - \frac{2}{\pi} \left| -\frac{v}{2} \sqrt{\sigma^2 - v^2} + \frac{\sigma^2}{2} \arcsin \frac{v}{\sigma} \right|_0^{\sigma}$$

Mithin ergibt sich:

(14) $$M_v = \sigma : \sqrt{2}$$

Während der Geländeaufnahme ändert sich nun die Stehachsenneigung σ und zwar nach verschiedenen Gesetzen je nach der Art der Messung. Bei dem ersten der auf Seite 129 beschriebenen Beobachtungsverfahren hängt der jedesmalige Endwert von σ von der Genauigkeit ab, mit welcher die Dosenlibelle beobachtet werden kann. Die Endwerte σ haben also die Wahrscheinlichkeit zufälliger Fehler, wie sie durch das Gaußsche Fehlergesetz ausgedrückt ist. Wir rechnen offenbar ungünstig, wenn wir unter Vernachlässigung der allmählich entstehenden Zwischenwerte von 0 bis zum jedesmaligen Wert

σ für alle während der Beobachtung vorhandenen Werte σ die Gaußsche Fehlerfunktion zugrunde legen. Wir können dann aber als mittleren Betrag aller Werte σ unmittelbar den Einstellfehler M_σ einsetzen, der erfahrungsgemäß mit einer Dosenlibelle begangen wird,

Soll nun der mittlere Betrag M_L aller Sichtneigungen ν berechnet werden, die möglich sind, wenn ν alle Werte von 0 bis σ annimmt, während σ sich gleichzeitig von 0 bis zu einem beliebigen Höchstwert ändert, so kann wieder die Formel (6,III) benutzt werden. Der Nenner ist 1/2, der Zähler wird durch ein Doppelintegral ausgedrückt. Allgemein wird dann:

$$M_L^{\,2} = 2\int_0^\infty 2\int_0^\sigma \nu^2 \varphi(\nu)\, d\nu\, \varphi(\sigma)\, d\sigma .$$

Mit Rücksicht auf (14) kann man setzen:

$$M_L^{\,2} = 2\int_0^\infty \frac{\sigma^2}{2} \varphi(\sigma)\, d\sigma .$$

d. h., wenn mit M_σ der mittlere Betrag aller Stehachsenneigungen bezeichnet wird:

$$M_L = M_\sigma : \sqrt{2} \qquad (15)$$

Diese Formel kann für jedes der beiden auf S. 129 angedeuteten Beobachtungsverfahren angewendet werden. Der mittlere Libellenneigungsfehler M_{L1} für das erste Verfahren ergibt sich durch Einsetzung des Wertes M_σ, der aus Beobachtungen gewonnen ist. Der entsprechende

Fehler M_{L2} für das zweite Verfahren läßt sich unmittelbar aus dem Höchstbetrage $\mathfrak{M}_L$ herleiten, der der Festsetzung entsprechend für die Stehachsenneigung noch zugelassen wird. Zwischen diesem Höchstbetrage und Null kann dann σ jeden Zwischenwert mit gleicher Wahrscheinlichkeit (gleich lange) annehmen. Daher ist $\varphi(\sigma) = C$. Nach (3,IV) wird $M_{\sigma 2} = \mathfrak{M}_L : \sqrt{3}$, also

$$M_{L2} = \mathfrak{M}_L : \sqrt{6} \tag{16}$$

Zur Auswertung der Formeln (15) und (16), die die beiden unterschiedenen Höhenbeobachtungsverfahren betreffen, müssen nun Zahlenbeträge für M_σ und $\mathfrak{M}_L$ gewählt werden. M_σ sollte der mittlere Einstellfehler beim Gebrauch einer Dosenlibelle sein. Vogler veröffentlicht (Geodätische Übungen II, Aufgabe 69) Versuche zur Bestimmung der Genauigkeit der Lotrechtstellung einer Stehachse mittels Dosenlibelle und berechnet darnach $M_{\sigma 1} = \pm 58''$. Verf. hat eine Anzahl ähnlicher Versuche mit verschiedenen Libellen durchgeführt und Werte zwischen 10" und 33" erhalten. Der mittlere Betrag aus 55 Beobachtungen betrug 24". In ihm ist der mittlere Fehler der Justierung der Dosenlibelle einbegriffen. Da es jedoch zweckmäßig ist, lieber zu ungünstig als zu günstig zu rechnen, so möge für M_L der runde Betrag von $1' = 60''$ eingeführt werden. Er dürfte sich selbst unter ungünstigen Beobachtungsverhältnissen im Felde unschwer innehalten lassen. Wird dieser Wert in (15) eingesetzt, so ergibt sich $M_{L1} = 42{,}4''$. Beim zweiten Beobachtungsverfahren sollte $\mathfrak{M}_L$ die größte Neigung σ der Stehachse sein, die der Beobachter beim Gebrauch von Kreuzlibellen zuläßt. Bei einer allgemeinen Behandlung des Gegen-

standes kann dafür nur ein Wert ausgesucht werden, der im allgemeinen zweckmäßig erscheint. Kreuzlibellen haben häufig nur eine geringe Angabe von 1' bis 2'. Trotzdem kann man verhältnismäßig recht gleichmäßige Beobachtungen und Einstellungen mit ihnen erzielen. Es möge der Einfachheit wegen vorläufig der Beobachtungsfehler vernachlässigt und $\mathfrak{M}_L$ auf genau 2' festgesetzt werden. Dieser Betrag kann für eilige Beobachtungen wohl als erlaubt gelten. Seine Zulassung gewährt dem Beobachter schon wesentliche Vorteile zugunsten schnellen Arbeitsfortschritts. Mit seiner Verwendung findet sich aus (16): $M_{L2} =$ rd. 50". Diese mittlere Sichtneigung, die übrigens schon auf S. 116 benutzt wurde, ist zur Berechnung der Höhenfehler in der Zahlentafel 10 verwendet worden und zwar für alle drei Tachymeterarten. Das erschien erwünscht, um die Zahlenwerte leichter vergleichbar zu machen, zumal M_{L1} u. M_{L2} nur wenig voneinander abweichen. Beim Gefäll- und Reduktionstachymeter tritt nach (2) und (9) der Wert M_L unmittelbar in den Fehlerformeln auf. Beim Kreistachymeter äußert sich M_L nur als Teil von M_α. Um die Vorteile des mit Alhidadenlibelle und Strichmikroskop ausgerüsteten Kreistachymeters zu kennzeichnen, sind in Spalte 5 und 6 zwei getrennte Berechnungen durchgeführt worden, die erste in Spalte 5 mit $M_\alpha = \mu_\alpha = 20"$, dagegen die zweite in Spalte 6 mit $M_\alpha = 80"$. Letzterer Wert entspricht etwa dem mittleren Betrag aus einem einfachen Ablesefehler am Höhenkreis von 1' und der Libellenneigung $M_{L2} = 50"$. In Tafel 10 ist wiederum, wie in Tafel 9, für die Höhenwerte des Kreistachymeters, ein mittlerer Rechenfehler $\mu_r = 1{,}8$ cm berücksichtigt worden. Auch für eilige Beobachtungen gilt die bereits auf S. 120 eingefügte Bemerkung, daß die Höhenfehler

im stark geneigten Gelände größer ausfallen, als es in Tafel 10 angegeben ist, weil dann die Formel (1) der Einleitung angewendet werden muß.

Die in Tafel 10 mitgeteilten Fehlerwerte können nicht mehr wie jene der Tafel 9 als Prozente der in verschiedenen Entfernungen zu befürchtenden Fehler angenommen werden, da sie im wesentlichen von den Abrundungsfehlern μ_c herrühren, die auf alle Entfernungen gleiche Größe haben. Diese Bemerkung gilt sowohl für die mittleren wie auch für die maximalen Fehler.

Mittlere Längen- und Höhenfehler aus Centimeterablesungen mit dem Kreistachymeter teilt Fuhrmann in der Ztschrft. f. Bauwesen 1905 mit. Er nimmt aber die Gewichte umgekehrt verhältnisgleich den Quadraten der Zielweiten an, während sie nach der Bemerkung im vorstehenden Absatz auf alle Zielweiten, wenigstens auf die nahen und mittleren, angenähert gleich ausfallen müssen. Fuhrmann berechnet aus 419 Beobachtungen $M_e = 0{,}455$ m und aus 397 Beobachtungen $M_h = 4{,}1$ cm. Da bei der Fuhrmannschen Gewichtsfestsetzung die Fehler der kurzen Strecken übergroß in Rechnung gestellt werden, so ist es erklärlich, daß die mittleren Fehler größer ausfallen, als es nach den hier angestellten theoretischen Ermittelungen erwartet werden müßte. Sonstige Genauigkeitsbetrachtungen über eilige Beobachtungen liegen anscheinend nicht vor. Wir werden im folgenden noch Betrachtungen über den Vergleichswert der aus eiligen Beobachtungen berechneten mittleren Fehler anzustellen haben.

Fehlerwahrscheinlichkeit und Maximalfehler.

Bei der Beurteilung sorgfältiger Messungen kann das Gaußsche Fehlergesetz für die Endfehler zugrunde

gelegt werden. Für eilige Beobachtungen sind erst die Fehlergesetze, d. h. die Beziehungen zwischen Fehlergröße und Fehlerwahrscheinlichkeit der Endfehler zu ermitteln. Erst diese Beziehungen geben Aufschluß darüber, welche Endfehler man bei eiligen Beobachtungen zu befürchten hat. Ohne die gleichzeitige Beachtung dieser Beziehungen sind sogar berechnete Fehlermittel nicht einmal vergleichbar.

Wir wollen zunächst die Ablesefehler der eiligen Beobachtungen näher betrachten. Bei ihnen wirken, wie bereits auf S. 126 dargelegt wurde, Abrundungsfehler ε_c und Schätzungsfehler ε_u zusammen. Es sind zwei verschiedene Fälle dieses Zusammenwirkens zu unterscheiden, die in den Abbildungen 20a u. 20b für die beliebig angenommene Centimetergrenze 7 nebeneinander dargestellt sind. Die Striche in diesen Figuren neben den Ziffern 6; 7 und 8 sollen die Centimetergrenzen andeuten. Die Aufeinanderfolge der Ziffern läßt sogleich die Vorzeichen der verschiedenen Ablesefehler erkennen, wenn die Vorzeichenregel: „Soll minus Messung gleich Fehler", beachtet wird. Der in Fig. 20a dargestellte Fall kommt besonders häufig bei kürzeren Sichten vor. Die wahre Fadenstelle F und die geschätzte F' liegen innerhalb desselben Halbcentimeterfeldes. Dann übt ε_u keinen Einfluß auf den wahren, in der Feldbuchzahl enthaltenen Fehler ε aus, weil sich für die Latten-

Fig. 20a.

Fig. 20b.

Tafel 10. Fehlerwerte für eilige Beobachtungen.

$e = 100$ m.

Neigungswinkel α	Längenfehler			Höhenfehler			
	Gefälltachymeter	Kreistachymeter	Reduktionstachymeter	Gefälltachymeter	Kreistachym. $M_\alpha = 20''$	Kreistachym. $M_\alpha = 80''$	Reduktionstachymeter
	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm
1	2	3	4	5	6	7	8
Mittlere Fehler ohne Berücksichtigung d. Lattenneigung.							
0°	43	34	34	2,4	2,1	4,3	(7,0)
2° 51,7' (1:20)	43	34	34	3,4	2,7	4,6	
5° 42,7' (1:10)	43	34	34	5,1	3,9	5,4	
10°	—	33	34	—	6,2	7,2	
20°	—	30	34	—	11,1	11,6	
30°	—	26	34	—	14,8	15,1	
Mittlere Fehler M mit Berücksichtigung der Lattenneigung.							
0°	43	34	34	2,4	2,1	4,3	(7,0)
2° 51,7' (1:20)	44	34	34	3,4	2,7	4,6	(7,0)
5° 42,7' (1:10)	48	35	35	5,4	4,0	5,4	(7,0)
10°	—	35	36	—	6,5	7,4	(7,2)
20°	—	40	43	—	14,2	14,5	(11,2)
30°	—	47	53	—	26,7	26,8	(23,3)
Maximale Gesamtfehler (M).							
	m	m	m	cm	cm	cm	cm
0°	1,1	0,9	0,9	9	6	16	25
2° 51,7' (1:20)	1,3	0,9	0,9	11	8	17	25
5° 42,7' (1:10)	1,4	1,0	1,0	17	12	20	25
10°	—	1,0	1,1	—	19	27	26
20°	—	1,2	1,3	—	43	48	39
30°	—	1,4	1,6	—	80	84	75

stelle F' dasselbe Abrundungsmaß ergibt wie für F. In diesem ersten Falle nach Fig. 20a ist also der gesamte Schätzungsfehler $\varepsilon = \varepsilon_c$. Je näher die wahre Fadenstelle F an die Centimetermitte rückt, um so häufiger tritt der zweite Fall ein, daß nämlich die nach der Seite des benachbarten Halbcentimeterfeldes zu begangenen Schätzungsfehler ε_u den Faden jenseits der Centimetermitte statt in F in F' erkennen lassen, wie es in Fig. 20b zweifach, getrennt für positive und negative Fehlerwerte, angedeutet ist. Wird in diesem zweiten Fall der Faden statt in F in einem Punkt F' des benachbarten Halbcentimeterfeldes irrtümlicherweise erkannt, so wird die Ablesung statt auf die tatsächlich nächste Centimetergrenze 8 bzw. 6 auf die scheinbar nächste 7 abgerundet und statt des Fehlers $\mp \varepsilon_c$ wird der Fehler $\pm \varepsilon_f = \pm (\frac{i}{2} + f)$ in der Feldbuchzahl begangen, wenn i die Intervallänge bezeichnet. Je nach der Größe und Lage von ε_u ist also der gesamte wahre Fehler ε entweder gleich ε_c oder gleich ε_f.

Immer dann, wenn durch einen unbeabsichtigten Schätzungsfehler ε_u die fehlerhaft erkannte Lattenstelle F' nicht innerhalb desselben Halbcentimeterfeldes liegt, in dem sich F befindet, entgeht der dem Punkt F zunächst gelegenen Centimetergrenze ein Abrundungsfehler $\mp \varepsilon_c$. Als Ersatz für ihn hat man aber einen vergrößerten Ablesefehler $\pm \varepsilon_f$ einzusetzen, denn man hat für alle Centimeterfelder die gleichen Verhältnisse anzunehmen und deshalb zu mutmaßen, daß dieselbe Erscheinung auch wieder für einen anderen Punkt F eintritt, der um 1 cm von dem vorher betrachteten entfernt liegt. Beispielsweise fällt für den oberen Punkt F in Fig. 20b ein Abrundungsfehler $-\varepsilon_c$ aus, der sich unter den auf 8 cm lautenden Feldbuchmaßen befinden müßte, falls Schätzungsfehler nicht vorkämen. Statt $-\varepsilon_c$ tritt $+\varepsilon_f$ unter den auf 7 cm

lautenden Feldbuchmaßen auf. Man hat nun nach Obigem anzunehmen, daß ein Abrundungsfehler von der Größe $-\varepsilon_c$ von den auf 7 cm lautenden Feldbuchmaßen fortfällt und vergrößert als $+\varepsilon_f$ unter den auf die benachbarte 6te Centimetergrenze lautenden Feldbuchmaßen auftritt. Somit ersetzt für die 7te Centimetergrenze ein Fehler $+\varepsilon_f$ einen Fehler $-\varepsilon_c$. Die Anzahl der Fehler unter den auf eine bestimmte Centimetergrenze, z. B. auf 7 cm lautenden Feldbuchzahlen ändert sich also nicht durch Berücksichtigung der Schätzungsfehler, wie das ja auch nahe liegt. Nur die Größe der Fehler ändert sich, sofern beim Eintritt des oben betrachteten zweiten Falles der Fehleranhäufung statt eines Abrundungsfehlers $-\varepsilon_c = -(\frac{i}{2} - f)$ der vergrößerte Fehler $+\varepsilon_f = \frac{i}{2} + f$ auftritt. Entsprechendes wie für positive Fehler ε_u gilt auch für negative. Sie bewirken gegebenenfalls, daß statt einer gewissen Anzahl von Fehlern $+\varepsilon_c = \frac{i}{2} - f$ solche $-\varepsilon_f = -(\frac{i}{2} + f)$ in gleicher Menge auftreten. Die Betrachtung geht von der Voraussetzung aus, daß Schätzungsfehler über den Betrag von $\frac{i}{2}$ hinaus nur in unwesentlich geringer Anzahl auftreten. Diese Annahme ist nur für die hier betrachteten Entfernungen bis höchstens etwa 200 m berechtigt.

Die aus den angestellten Betrachtungen folgende Fehlerhäufigkeit ist in Fig. 21 zeichnerisch dargestellt worden. Durch AB geht die Centimetergrenze. Rechtwinklig zu dieser Linie sind die Fehlerwerte aufgetragen. $AD = \frac{i}{2}$ würde den größten Fehler angeben, falls Schätzungsfehler ε_u nicht vorkämen. Infolge ihres Auftretens zeigen sich indessen größere Gesamtfehler etwa bis zum Betrage AK'.*) Rechtwinklich zu AK' sind nun in

*) Der oberste Buchstabe in Fig. 21 soll K' statt K heißen.

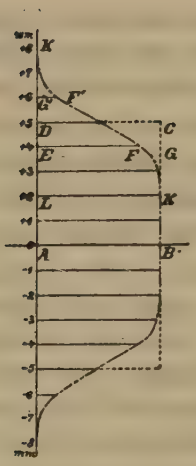


Fig 21.

Fig. 21 die Wahrscheinlichkeitsmaße der einzelnen Fehler aufgetragen worden. Soweit Schätzungsfehler nicht auftreten, wie es z. B. für die kleinen Fehler von A bis L angenommen ist, gilt $\varphi(\varepsilon) = c = AB$. Für die größeren Fehler, z. B. für AE ist $\varphi(\varepsilon)$ um FG kleiner, wobei FG das Wahrscheinlichkeitsmaß $\varphi(\varepsilon_u)$ für Fehler ε_u ist, die größer als $ED = f$ sind. Der größte mögliche Fehler sei F. Nach Vorstehendem ist, wenn sogleich der Faktor $d\varepsilon$ beiderseits aufgenommen wird, für Fehler $\varepsilon < \frac{i}{2}$:

$$(15) \qquad \varphi(+\varepsilon)\,d\varepsilon = c\,d\varepsilon - c \int_{+f}^{+F} \varphi(\varepsilon_u)\,d\varepsilon_u\,d\varepsilon$$

Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß gilt sowohl für positive wie für negative Fehler. Man kann dafür auch schreiben:

$$(15^*) \qquad \varphi(-\varepsilon)\,d\varepsilon = c\,d\varepsilon - c \int_{-F}^{-f} \varphi(\varepsilon_u)\,d\varepsilon_u\,d\varepsilon$$

Nun ist:

$$(16) \qquad c\int_{+f}^{+F} \varphi(\varepsilon_u)\,d\varepsilon_u = c\int_{0}^{+F} \varphi(\varepsilon_u)\,d\varepsilon_u - c\int_{0}^{+f} \varphi(\varepsilon_u)\,d\varepsilon_u$$

und ebenso:

$$(16^*) \qquad c\int_{-F}^{-f} \varphi(\varepsilon_u)\,d\varepsilon_u = c\int_{-F}^{0} \varphi(\varepsilon_u)\,d\varepsilon_u - c\int_{-f}^{0} \varphi(\varepsilon_u)\,d\varepsilon_u$$

Wir haben es hier nur mit zufälligen Fehlern zu tun deren Wahrscheinlichkeit durch eine gerade Funktion dargestellt wird. Es ist $\varphi(+\varepsilon_u) = \varphi(-\varepsilon_u)$ und daher auch:

$$\int_0^{+f} \varphi(\varepsilon_u)\, d\varepsilon_u = \int_{-f}^{0} \varphi(\varepsilon_u)\, d\varepsilon_u = \frac{1}{2} \int_{-f}^{+f} \varphi(\varepsilon_u)\, d\varepsilon_u$$

und:

$$\int_0^{+F} \varphi(\varepsilon_u)\, d\varepsilon_u = \int_{-F}^{0} \varphi(\varepsilon_u)\, d\varepsilon_u = \frac{1}{2} \int_{-F}^{+F} \varphi(\varepsilon_u)\, d\varepsilon_u$$

Das letzte Integral der rechten Seite ist gleich der Einheit, denn es ist völlig sicher, daß ein Fehler zwischen den äußersten Grenzen $-F$ und $+F$ vorkommt. Durch Einsetzung der erhaltenen Werte ergibt sich sowohl aus (15) wie aus (15*) übereinstimmend:

$$\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{c}{2} \left\{ 1 + \int_{-f}^{+f} \varphi(\varepsilon_u)\, d\varepsilon_u \right\} d\varepsilon$$

Das Integral in der Klammer gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß ein Fehler zwischen den Grenzen $-f$ und $+f$ vorkommt. Es ist bei Zugrundelegung der Gaußschen Fehlerfunktion bekannt und gleich:

$$\Theta(fh) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ fh - \frac{(fh)^3}{3 \cdot 1!} + \frac{(fh)^5}{5 \cdot 2!} - \frac{(fh)^7}{7 \cdot 3!} + \cdots \right\}$$

Mit der Einführung dieses Wertes läßt sich die letzte Gleichung schreiben:

(17) $$\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{c}{2}\left\{1 + \Theta(fh)\right\} d\varepsilon$$

wobei $f = \frac{i}{2} - \varepsilon$ ist.

Wie oben erwähnt, betrifft dieses Wahrscheinlichkeitsmaß nur die Fehler ε, welche kleiner als $\frac{i}{2}$ sind. Die größeren sind nach den Ausführungen auf S. 138 so häufig vertreten, als die Differenz des Betrages aus (15) oder (17) gegen $c\, d\varepsilon$ ausmacht. Diese Differenz ist bereits in (16) angegeben und kann auch durch:

(17*) $$\varphi_1(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{c}{2}\left\{1 - \Theta(fh)\right\} d\varepsilon$$

ausgedrückt werden. Ein positives Vorzeichen in der Klammer gilt also für $\varepsilon < \frac{i}{2}$, ein negatives für $\varepsilon > \frac{i}{2}$. Zur Auswertung der Wahrscheinlichkeitsmaße kann für das Genauigkeitsmaß h nach (7,III) auf S. 79 der mittlere Fehler μ eingeführt werden. Die Funktion $\Theta(fh)$ schreitet mit dieser Einführung nach Potenzen von $f:\mu$ fort. f kann als $n$facher Wert von μ angesehen und statt $\Theta(fh)$ kann $\Theta(n\mu)$ geschrieben werden, sodaß sich unter Zusammenziehung von (17) und (17*) setzen läßt:

(17**) $$\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{c}{2}\left\{1 \pm \Theta(n\mu)\right\} d\varepsilon$$

wenn $\pm n\mu = \frac{i}{2} - \varepsilon = \pm f$ ist. Die Anwendung der Formel (17**) ist bei runden Werten von μ bequemer als die der Formeln (17) und (17*).

Für Centimeterablesungen ist μ derjenige mittlere Ablese- oder Schätzungsfehler μ'_a, welcher nahe der Centimetermitte begangen wird. Wie bereits auf S. 104 er-

wähnt, ist er kleiner als der Gesamtschätzungsfehler μ_a und kann auch hier, wie auf S. 116, zu $\pm 1{,}0$ mm angesetzt werden, wenn μ_a selbst, wie bisher, mit 1,5 mm beibehalten wird. Aus (III,7) folgt dann $h = 0{,}707\ \text{mm}^{-1}$.

Unter Zugrundelegung dieser Maße sind für $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = w_0$ die Werte der zweiten Spalte in Tafel 11 ausgerechnet und in Fig. 21 maßstäblich aufgetragen worden. Die Auswertung geschah aus (17**) unter Zuhilfenahme der Tafeln für $\Theta(n\mu)$ aus Wellischs Ausgleichungsrechnung. Für die weitere Rechnung sind indessen nicht die rechnungsmäßigen Werte von $\varphi(\varepsilon)$ für die betr. vollen Millimeterfehler benutzt worden, sondern die arithmetischen Mittel der Wahrscheinlichkeiten für diejenigen Fehler, die um 0,25 mm kleiner bezw. größer sind. Diese Mittelwerte ermöglichen offenbar eine schärfere Rechnung von w_0 als die Wahrscheinlichkeiten für die vollen Millimeterfehler allein. Die angewandte Rechnungsweise läßt sich auch so erklären, daß — unter Einsetzung von $c\, d\varepsilon = 0{,}1$ — die Formel (17**) in

$$\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{1}{40}\left\{2 \pm \Theta(n_1\mu) \pm \Theta(n_2\mu)\right\}$$

umgewandelt ist, wobei $n_1\mu$ und $n_2\mu$ Nachbarwerte von Fehlern ε bezeichnen, die um 0,25 mm größer bzw. kleiner als $f = n\mu = \frac{i}{2} - \varepsilon$ sind. ε selbst nimmt dabei um volle Millimeter zu. Jedes in Tafel 11 für einen bestimmten Millimeterwert von ε eingetragene Wahrscheinlichkeitsmaß gilt demnach für die beiden benachbarten Halbmillimeterfelder, die man sich entweder auf der positiven oder der negativen Seite der Fehlerreihe denken kann.

Als Beispiel möge die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Fehlers von 3 mm nachgefügt werden. Seine beiden um 0,25 mm entfernten

Nachbarwerte sind 2,75 mm und 3,25 mm. Da das Intervall $i = 10$ mm und der mittlere Ablesefehler $\mu = \mu'_a = 1$ mm einzusetzen ist, so können die beiden Nachbarwerte auch mit $\frac{i}{2} - 2{,}25\,\mu$ u. $\frac{i}{2} - 1{,}75\,\mu$ bezeichnet werden, sodaß $f = 2{,}25\,\mu$ bzw. $1{,}75\,\mu$ ist. Nach den Tafeln von Wellisch ist $\Theta(2{,}25\,\mu) = 0{,}9756$ und $\Theta(1{,}75\,\mu) = 0{,}9199$. Daher wird $\varphi(3\text{ mm}) = 1/40\,(2 + 0{,}9756 + 0{,}9199) = 0{,}0974$, wie es Spalte 2 der Tafel 11 angibt.

Die Wahrscheinlichkeitskurve besteht nach Fig. 21 im positiven und negativen Teil je für sich aus 2 kongruenten Zweigen, die sich durch Drehung des einen um 180^0 um den Endpunkt der für $\frac{i}{2}$ geltenden Wahrscheinlichkeitsordinate $\frac{c}{2}$ zur Deckung bringen lassen. Der bezeichnete Endpunkt stellt also den Wendepunkt der Kurve dar. Mehrere derartige, für verschiedene Genauigkeitsmaße μ konstruierte Kurven sind zueinander perspektivisch affin, wie sich leicht beweisen läßt.

Die ermittelten Wahrscheinlichkeiten $\varphi(\varepsilon)\,d\,\varepsilon$ gelten beim Gefälltachymeter für die Fehler ε_O und ε_U in gleicher Weise. Die algebraischen Summen der verschiedenen Werte von ε_O und ε_U sind zugleich die verschiedenen Werte von ε_l. Ein bestimmter Fehler ε_l kommt deshalb so oft vor, wie zwei Fehler ε_O und ε_U, deren algebraische Summe jenes ε_l ergibt, zusammen vorkommen können. Die Fehler ε_O und ε_U sind voneinander unabhängig. Ist w_O die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Wert von ε_O und w_U diejenige für einen bestimmten Wert von ε_U, so ist $w = w_O \cdot w_U$ die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen von ε_O und ε_U, d. h. für den zugehörenden Fehler $\varepsilon_l = \varepsilon_O + \varepsilon_U$. Derselbe Wert ε_l kann je nach seiner Größe und seinem Vorzeichen aus verschie-

denen Einzelfehlern ε_O und ε_U entstehen. Die Gesamtwahrscheinlichkeit w_l für eine bestimmte Größe ε_l ist daher:

$$w_l = \Sigma\, w_O \cdot w_U \tag{18}$$

wobei sich die Summe über die Produkte aller derjenigen Faktoren w_O und w_U erstreckt, deren Argumente ε_O und ε_U sich bei algebraischer Addition zu ε_l, dem Argument von w_l, vereinigen. Bei Verwendung von Integralen würde zu schreiben sein:

$$\varphi(\varepsilon_l)\, d\varepsilon_l = d\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon) \cdot \varphi(\varepsilon - \varepsilon_l)\, d\varepsilon$$

Die Auswertung der Integrale kann indessen nur unter Benutzung von Tafeln etwa in der angegebenen Weise erfolgen.

Als Beispiel möge der Rechnungsgang für den Fehler $\varepsilon_l = +2$ mm durchgeführt werden. Er entsteht, wenn $\varepsilon_O - \varepsilon_U = +2$ mm ist. In der folgenden Zusammenstellung enthalten die ersten beiden Spalten die Fehlerkombinationen, die $\varepsilon_l = +2$ mm liefern; in den beiden folgenden Spalten sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße w_O und w_U aus Spalte 2 der Tafel 11 aufgeführt. Die letzte Spalte enthält deren Produkte w. Es ergibt sich stets derselbe Wert von ε_l, sowohl wenn bestimmte Werte von ε_O und ε_U beide positiv sind, wie wenn sie ihre Absolutwerte vertauschen und zugleich beide negativ auftreten. Daher finden sich auch die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsbeträge w_l je zweifach.

ε_O	ε_U	w_O	w_U	$w = w_O \cdot w_U$
+ 7	+ 5	0,0026	0,05	0,00013
+ 6	+ 4	0,0166	0,0834	0,00139
+ 5	+ 3	0,05	0,0974	0,00487
+ 4	+ 2	0,0834	0,0998	0,00832
+ 3	+ 1	0,0974	0,1	0,00974
+ 2	0	0,0998	0,1	0,00998
+ 1	— 1	0,1	0,1	0,01
0	— 2	0,1	0,0998	0,00998
— 1	— 3	0,1	0,0974	0,00974
— 2	— 4	0,0998	0,0834	0,00832
— 3	— 5	0,0974	0,05	0,00487
— 4	— 6	0,0834	0,0166	0,00139
— 5	— 7	0,05	0,0026	0,00013
				0,07886

Der Schlußwert $w_l = \Sigma w_O \cdot w_U$ ist in Spalte 3 der Tafel 11 aufgeführt. In entsprechender Weise haben sich die anderen Werte jener Zahlenspalte gefunden. Fig. 22 enthält in der Vollkurve eine zeichnerische Darstellung der Beträge w_l.

Durch Summierung aller Werte w_l zwischen den Grenzen $\varepsilon = + 10{,}0$ und $\varepsilon = - 10{,}0$ und Interpolation innerhalb $\pm w_{11}$, d. h. innerhalb des Bereichs des von $\varepsilon = \pm 10{,}5$ bis $\varepsilon = \pm 11{,}5$ mm geltenden Wahrscheinlichkeitswertes $2 \cdot 0{,}00213$ findet sich, daß die Wahrscheinlichkeitsgrenze 0,9973

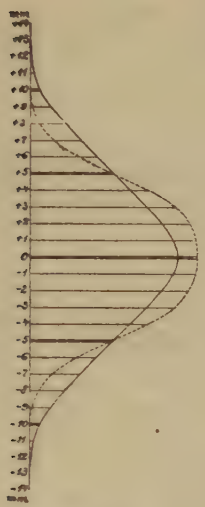


Fig. 22.

für $\varepsilon = \pm 11{,}2$ mm gilt. Für horizontale Strecken kann demnach $\mathfrak{M}_l = 11{,}2$ mm gesetzt werden, für stärker geneigte ist noch der Lattenneigungsfehler zu berücksichtigen.

In entsprechender Weise können die Wahrscheinlichkeiten für die bei eiligen Kreistachymetermessungen auftretenden Fehler ermittelt werden. Wenn die Geländepunkte mit dem Kreistachymeter nach Tafel 2 aufgemessen werden, so wird U auf eine Dezimetergrenze eingestellt und O auf Centimeter genau abgelesen. Für w'_O gelten dann nach den obigen Ermittelungen die Werte der Spalte 2 aus Tafel 11. Für w'_U indessen kann ebenso wie bei sorgfältigen Messungen das Gaußsche Fehlergesetz zugrunde gelegt werden, und zwar haben wir zur Ermittelung von Zahlenwerten mit Rücksicht auf die Ausführungen auf S. 103/104 den mittleren Einstellungsfehler mit $\mu_a = \pm 1{,}5$ mm einzusetzen. Die Werte w'_U ergeben sich als Differenzen der Beträge $\Phi(n\mu)$ aus den Tafeln von Wellisch. Beispielsweise findet sich für den Fehler $\varepsilon_U = 0$, d. h. für alle Fehler zwischen den Werten 0 und $\pm 0{,}5$ mm oder 0 und $\pm 333\,\mu$, unmittelbar der interpolierte Tafelwert 0,2611. Der Fehler $\varepsilon_U = +1$ mm hat, od. besser gesagt, alle Fehler von $+0{,}5$ bis $+1{,}5$ mm bzw. von $+0{,}333\,\mu$ bis $+\mu$ haben eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}(0{,}6827 - 0{,}2611) = 0{,}2108$. Dieselbe Wahrscheinlichkeit kommt dem Fehler $\varepsilon_U = -1$ mm zu u. s. f. Die derart ermittelten Werte w'_U sind in Spalte 4 der Taf. 11 eingetragen.

Tafel 11. Wahrscheinlichkeit w für das Eintreffen von Lattenabschnittsfehlern bei Centimeterablesungen.

Lattenfehler in mm + oder −	$w_O - w_U$	w_l	w'_U	w'_l	Höhenfehler in cm für $e = 100$ m + oder −	w_{L1}	w_{L2}
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,1	0,08837	0,2611	0,09935	0		
1,0	0,1	0,08574	0,2108	0,09845	0,5	0,2698	0,2015
2,0	0,0998	0,07886	0,1109	0,09481	1,0	0,0920	0,0745
3,0	0,0974	0,06979	0,0380	0,08611	1,5	0,0690	0,0612
4,0	0,0834	0,05997	0,0084	0,07063	2,0	0,0527	0,0519
5,0	0,05	0,05000	0,0012	0,05000	2,5	0,0413	0,0447
6,0	0,0166	0,04001	0,0001	0,02936	3,0	0,0310	0,0388
7,0	0,0026	0,03010	—	0,01389	3,5	0,0233	0,0337
8,0	0,0002	0,02057	—	0,00517	4,0	0,0172	0,0289
9,0	—	0,01213	—	0,00149	4,5	0,0124	0,0245
10,0	—	0,00582	—	0,00033	5,0	0,0088	0,0200
11,0	—	0,00213	—	0,00005	5,5	0,0061	0,0153
12,0	—	0,00057	—	0,00002	6,0	0,0041	0,0058
13,0	—	0,00011	—	0,00001	6,5	0,0027	—
14,0	—	0,00001	—	—	7,0	0,0018	—
					7,5	0,0011	—
					8,0	0,0007	—
					8,5	0,0004	—
					9,0	0,0002	—
					9,5	0,0001	—
					10,0	0,0001	—
					10,5		

Da nunmehr w'_O und w'_U bekannt sind, kann aus beiden w'_l nach Formel (18) ganz so ermittelt werden wie vorher w_l aus w_O und w_U. Der Rechnungsvorgang läßt sich aus dem Formular auf S. 146 erkennen. Die Endwerte w'_l sind in Spalte 5 der Zahlentafel 11 aufgeführt. Eine zeichnerische Darstellung derselben enthält die gestrichelte Kurve in Fig. 22. Durch Addition der w'_l, die für Fehler von 0 bis $\pm$ 8,5 mm gelten u. Interpolation innerhalb des Wertbereiches $2 \cdot 0{,}00148 = 0{,}00296$, der für Fehler von $\pm$ 8,5 bis $\pm$ 9,5 mm gilt, ergibt sich, daß die Wahrscheinlichkeitsgrenze 0,9973 dem Fehler $e'_l = \pm$ 8,9 mm zukommt. Dieser kann daher als Maximalfehler $\mathfrak{M}'_l$ für horizontale Strecken angesehen werden.

Nach den früheren Erörterungen kann für das Reduktionstachymeter dieselbe Wahrscheinlichkeitskurve und derselbe Maximalfehler angenommen werden.

Die Tafel 11 und noch augenfälliger die Fig. 22 zeigt die Vorzüge der Einstellung auf U beim Kreis- und Reduktionstachymeter gegenüber der Ablesung von U beim Gefälltachymeter. Für eilige Beobachtungen liefert letzteres vielmehr größere Fehler als die ersteren beiden. Das Gefälltachymeter stellt sich also für eilige Beobachtungen weniger günstig als die beiden anderen. Aus den berechneten Werten von $\mathfrak{M}_l$ folgen unmittelbar die Entfernungsfehler $\mathfrak{M}_e$ mittels der Formeln (3) und (7). Diese Fehlerwerte sind der obigen Tafel (10) nachgefügt.

Je größer die Sichtneigungen sind, umsomehr treten Lattenneigungsfehler zu den bisher betrachteten Fehlern hinzu. Die Häufigkeit der Lattenneigungsfehler dürfte auch am besten durch die Gaußsche Fehlerfunktion angegeben werden können. Zur Auffindung des gesamten Maximalfehlers $\mathfrak{M}_l$ kann daher in der bisherigen Weise

weitergerechnet werden, indem für jeden Millimeterwert des Gesamtfehlers die Summen der Produkte der betreffenden Einzelwahrscheinlichkeiten gebildet werden. Es findet sich bei solcher Rechnung aber bald, daß infolge der mehrfachen Anwendung der Gaußschen Fehlerfunktion die Gesamtfunktion der Fehlerwahrscheinlichkeit sich immer mehr der Gaußschen nähert, sodaß völlig ausreichend $\mathfrak{M} = 3\,M$ gesetzt werden kann, zumal die Maximalfehler in der Praxis höchstens auf Dezimeter genau gebraucht werden können. Die maximalen Gesamtfehler für größere Sichtneigungen sind daher nach der obigen einfachen Regel in abgerundeten Maßen bestimmt und der Tafel 10 nachgefügt.

Die maximalen Höhenfehler hängen außer vom Ablesefehler vornehmlich von der Größe der freiwillig zugelassenen Neigungsfehler ab. Der Berechnung der mittleren Neigungsfehler waren zwei verschiedene auf Seite 129 gekennzeichnete Beobachtungsverfahren für den Gebrauch von Dosen- und Röhrenlibelle zugrunde gelegt worden. Es mögen zunächst die beiden diesen Verfahren eigentümlichen Wahrscheinlichkeitsfunktionen unter Verwendung der oben gewählten Neigungswerte ermittelt werden. Dazu eignet sich die Funktion (12). Es ist zweckmäßig, die Rechnung für ein bestimmtes Neigungsintervall $\triangle\nu$ durchzuführen, etwa für 10,313". Diese Neigung $\triangle\nu$ erzeugt einen Höhenfehler von 5 mm. Die einzelnen der Rechnung zugrunde gelegten Stehachsenneigungen σ sind zur Vereinfachung der Rechnung am besten als ganze Vielfache des gewählten Neigungsintervalls $\triangle\nu$ anzunehmen, also zu 10,3"; 20,6"; 30,9" usw. Die zugehörigen Sinusgrenzwerte $\frac{\nu}{\sigma}$ sind dann einfache Brüche, nämlich $\frac{10{,}3}{10{,}3} = 1$ für die Neigung $\nu = \sigma = 10.3"$, sodann $\frac{10{,}3}{20{,}6} = \frac{1}{2}$ für die Libellenneigung $\nu = 10{,}3"$ inner-

halb der Stehachsenneigung $\sigma = 20{,}6''$; sowie $\frac{20{,}6}{20{,}6} = 1$ für die Libellenneigung $\nu = 20{,}6''$ innerhalb der gleichwertigen Stehachsenneigung, ferner $\frac{10{,}3}{30{,}9} = \frac{1}{3}$ sowie $\frac{20{,}6}{30{,}9} = \frac{2}{3}$ und $\frac{30{,}9}{30{,}9} = 1$ für die Libellenneigungen innerhalb der Stehachsenneigung $\sigma = 30{,}9''$ usw. Zu diesen Sinuswerten sind dann die Winkel nachzuschlagen und deren Unterschiede $\angle$ arc sin $\frac{\nu}{\sigma}$ zu bestimmen. Für die obigen Beispiele sind das: 90^0 für $\sigma = 10{,}3''$, ferner 30^0 und 60^0 für $\sigma = 20{,}6''$, sodann $19{,}467^0$; $22{,}350^0$ und $48{,}183^0$ für $\sigma = 30{,}9''$. Die Quotienten dieser Unterschiede durch 180, also $\frac{1}{2}$ für $\sigma = 10{,}3''$, ferner $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{3}$ für $\sigma = 20{,}6''$, sodann 0,1081; 0,1242 und 0,2677 für $\sigma = 30{,}9''$ usw. legen die einzelnen Anteile zu den Wahrscheinlichkeitsmaßen fest, die die einzelnen Stehachsenneigungen $|\sigma|_0^{10{,}3''}$ *) $|\sigma|_{10{,}3''}^{20{,}6''}$, $|\sigma|_{20{,}6''}^{30{,}9''}$ usw. für die gleichwertigen Libellenneigungen und mithin für jeden Höhenfehler von 0 — 5; 5 — 10; 10 — 15 mm usw. liefern. Während die bisherige Rechnung für beide Beobachtungsverfahren mit Röhren- und Dosenlibelle übereinstimmt, treten nunmehr Unterschiede auf. Für das zweite Verfahren ist der Rechnungsgang bei Innehaltung der auf S. 129 festgelegten Annahmen der einfachere. Jedes Intervall der Stehachsenneigung von 10,313" kann mit derselben Wahrscheinlichkeit (während derselben Zeitdauer) eintreffen. Als Höchstbetrag von σ waren 120" angenommen worden, sodaß auf jedes Intervall eine Gesamtwahrscheinlichkeit

*) $|\sigma|_a^b = \sigma$ zwischen den Werten a und b.

von 10,313: 120 = 0,08594 entfällt. Mit diesem Maße sind die oben ermittelten Quotienten zu multiplizieren. Die resultierenden Produkte, also für $|\sigma|_{0}^{10,3''}$ der Wert 0,04297, für $|\sigma|_{10,3''}^{20,6''}$ die beiden Werte 0,01432 und 0,02863, sodann für $|\sigma|_{20,6''}^{30,9''}$ die drei Beträge 0,00929; 0,01067 und 0,02301 usw. sind die Wahrscheinlichkeitsanteile für die Libellenneigungen ν aus den einzelnen Stehachsenneigungen σ. In der folgenden Zusammenstellung sind diese Anteile für die Libellenneigung $|\nu|_{10,3''}^{20,9''}$ zusammengestellt. Unter ihnen treten u. a. die soeben ermittelten Beträge 0,02863, erzeugt durch die Stehachsenneigung $|\sigma|_{10,3''}^{20,6''}$ und 0,01067, erzeugt durch die Stehachsenneigung $|\sigma|_{20,6''}^{30,9''}$ auf.

Bei der für den Gebrauch der Dosenlibelle festgelegten Annahme, also bei dem auf Seite 129 gekennzeichneten ersten Beobachtungsverfahren, war den einzelnen Stehachsenneigungen verschiedene Wahrscheinlichkeit entsprechend der Gaußschen Fehlerfunktion zuerteilt worden. Als mittlere Stehachsenneigung galt $M = 60''$ nach Seite 133. Daher entspricht die geringste in der Rechnung auftretende Stehachsenneigung von $\sigma = 10,3''$ der prozentuellen Fehlergrenze $\frac{f}{M} = \frac{10,313}{60} = 0,1719\ M$, der nach den Tafeln von Wellisch eine Wahrscheinlichkeitsgrenze von 0,1365 zukommt. Das Produkt dieser Zahl mit dem oben ermittelten zugehör-

rigen Quotienten $\frac{1}{2}$, d. h. 0,06825, ergibt den Wahrscheinlichkeitsanteil der Stehachsenneigung $|\sigma|_{0}^{10,3''}$ für die gleichwertige Libellenneigung oder für Höhenfehler von 0 bis 5, im Mittel von 2,5 mm. Der nächsten Stehachsenneigung $\sigma = 20,6''$ entspricht eine prozentuelle Fehlergrenze $\frac{f}{M} = \frac{20,6}{60} = 0,3438$ und nach den Tafeln von Wellisch eine Wahrscheinlichkeitsgrenze von 0,2690. Dem Fehlerintervall zwischen 0,1719 M und 0,3438 M kommt also ein Wahrscheinlichkeitsintervall von 0,2690 — 0,1365 = 0,1325 zu. Mit dieser Zahl sind wieder die zugehörigen, der Stehachsenneigung $|\sigma|_{10,3''}^{20,6''}$ entsprechenden Quotienten $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{3}$ zu multiplizieren. Die Produkte, nämlich 0,02209 und 0,04417 stellen die Wahrscheinlichkeitsanteile dar, die den Libellenneigungen $|r|_{0}^{10,3''}$ und $|r|_{10,3''}^{20,6''}$ innerhalb der Stehachsenneigung $|\sigma|_{10,3''}^{20,6''}$ zukommen. Entsprechend ergibt sich für $\sigma = 30,9''$ eine prozentuelle Fehlergrenze $\frac{f}{M} = 0,5157$ und demnach eine Wahrscheinlichkeitsgrenze von 0,3939, also ein Wahrscheinlichkeitsintervall von 0,3939 — 0,2690 = 0,1249. Das Produkt dieser Zahl mit den zugehörigen Quotienten 0,1081; 0,1242 und 0,2677 ergibt die Wahrscheinlichkeitsanteile 0,01351; 0,01550 und 0.03344 u. s. f. In der folgenden Zusammenstellung sind auch für den Gebrauch der Dosenlibelle die Wahrscheinlichkeitsanteile für die Libellenneigung $|r|_{10,3''}^{20,6''}$ zusammengestellt. Unter ihnen finden sich beispielsweise für die Stehachsenneigungen von

Rechenbeispiel zu Tafel 11.

Grenzwerte der Stehachsenneigungen σ "	Grenzwerte der Sinus		Grenzwerte der Winkel arc sin $\frac{\nu}{\sigma}$		Intervall $\triangle$ arc sin $\frac{\nu}{\sigma}$	$\frac{\triangle \text{ arc sin } \frac{\nu}{\sigma}}{\pi}$	Prozentuelle Fehlergrenze $\frac{f}{M}$ f. Verfahren I	Grenzwerte der Wahrscheinlichkeit für σ	Intervall $\varphi(\sigma)$	Wahrscheinlichkeitsanteile f. Verfahren I	Wahrscheinlichkeitsanteile f. Verfahren II
	von	bis	von 0	bis 0	0						
10,3133	—	—	—	—	—	—	0,1719	0,1365			
20,62	0,5	1,0	30	90	60,0	0,3333	0,3438	0,2690	0,1325	0,04417	0,02864
30,94	0,3333	0,6667	19,47	41,82	22,35	0,1242	0,5157	0,3939	0,1249	0,01551	0,01067
41,25	0,25	0,50	14,48	30,00	15,52	0,0862	0,6875	0,5082	0,1143	0,00985	0,00741
51,56	0,20	0,40	11,54	23,58	12,04	0,0669	0,8594	0,6099	0,1017	0,00680	0,00575
61,88	0,1667	0,3333	9,59	19,47	9,88	0,0548	1,0313	0,6976	0,0877	0,00481	0,00471
72,19	0,1429	0,2857	8,22	16,60	8,38	0,0466	1,2032	0,7711	0,0735	0,00343	0,00400
82,50	0,125	0,25	7,18	14,48	7,30	0,0405	1,3751	0,8309	0,0598	0,00243	0,00348

92,82	0,1111	0,2222	6,38	12,84	6,46	0,0359	1,5470	0,8782	0,0473	0,00170	0,00309
103,13	0,1	0,2	5,74	11,54	5,80	0,0322	1,7189	0,9144	0,0362	0,00117	0,00277
113,44	0,0909	0,1818	5,22	10,48	5,26	0,0292	1,8908	0,9413	0,0269	0,00079	0,00251
[120,0	0,0859	0,1719	4,93	9,90	4,97	0,0276]	—	—	—	—	0,00150
123,76	0,0833	0,1667	4,78	9,60	4,82	0,0268	2,0626	0,9609	0,0196	0,00053	0,07453
134,07	0,0769	0,1538	4,41	8,85	4,44	0,0247	2,2345	0,9745	0,0136	0,00034	
144,39	0,0714	0,1428	4,09	8,21	4,12	0,0228	2,4064	0,9839	0,0094	0,00021	
154,70	0,0667	0,1333	3,82	7,66	3,84	0,0213	2,5783	0,9900	0,0061	0,00013	
165,00	0,0625	0,1250	3,58	7,18	3,60	0,0200	2,7502	0,9940	0,0040	0,00008	
175,32	0,0588	0,1176	3,37	6,75	3,38	0,0188	2,9221	0,9965	0,0025	0,00004	
185,64	0,0556	0,1111	3,19	6,38	3,19	0,0177	3,0940	0,9980	0,0015	0,00003	
195,94	0,0526	0,1052	3,02	6,04	3,02	0,0168	3,2659	0,9989	0,0009	0,00002	
206,26	0,05	0,1	2,87	5,74	2,87	0,0159	3,4378	0,9994	0,0005	0,00001	
										0,09205	

$|\sigma|_{10,3}^{20,6}$ und $|\sigma|_{20,6}^{30,9}$ die soeben ermittelten Beträge 0,04417 und 0,01550.

Wie die Zusammenstellung zeigt, ergibt die Summe aller Wahrscheinlichkeitsanteile, die der Libellenneigung ν im Intervall von 10,3" bis 20,6" zukommen, für das erste Verfahren rd. 0,0920 und für das zweite Verfahren 0,0745. Diese Wahrscheinlichkeitsmaße gelten sowohl für positive wie auch für negative Neigungen. In entsprechender Weise, wie vorstehend beschrieben, sind die Wahrscheinlichkeiten für alle nach den Annahmen möglichen Neigungsfehler ν berechnet und in den Spalten 7 und 8 der Tabelle 11 angegeben. Eine zeichnerische Darstellung zeigt Fig. 23. Die durch Kreuze gekennzeichnete Kurve entspricht ebenso wie Spalte 7 der Tabelle 11 dem ersten Verfahren mit Benutzung der Dosenlibelle, die abwechselnd durch Kreuze und Punkte dargestellte Kurve und die Spalte 8 der Tabelle 11 gelten für das zweite der beiden auf S. 129 beschriebenen Verfahren mit Benutzung der Röhrenlibelle. Durch Einrechnung ergibt sich beim ersten Verfahren eine innere Gesamtwahrscheinlichkeit von 0,9927 bis zum Höhenfehler von 7,7 cm, während beim zweiten diese Wahrscheinlichkeitsgrenze auf den Höhenfehler von 5, 9 cm trifft.

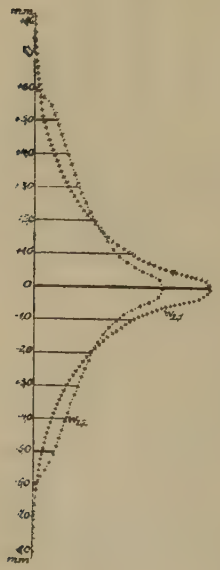


Fig. 23

Beide Wahrscheinlichkeitskurven lassen erkennen, daß sehr kleine Fehler eine verhältnismäßig große Wahrscheinlichkeit haben. Indessen treten besonders beim zweiten

Verfahren auch große Fehler mit beträchtlicher Häufigkeit auf. Während die erste Kurve sich asymtotisch der Abscissenachse nähert, zeigt die zweite, wie sich nach den festgelegten Annahmen von selbst versteht, einen ziemlich plötzlichen Abfall. Man hat daher mindestens den der Annahme entsprechenden größten Höhenfehler von 6 cm als Maximalfehler anzusehen. Er kann durch Beobachtungsfehler noch vergrößert werden. Es hat nun gar keinen Wert, noch genauere Rechnungen unter Annahme von Schätzungsfehlern durchzuführen, da sich schon die der bisherigen Rechnung zugrunde gelegten Annahmen in der Praxis nicht hinreichend durchführen lassen. Der Beobachter wird beim Auftreten größerer Stehachsenneigungen im allgemeinen das eilige Beobachtungsverfahren schon unterbrechen, bevor das Fernrohr alle vier Quadranten durchlaufen hat. Dann kann der Abfall der Wahrscheinlichkeitskurve zur Abscissenachse noch wesentlich ungünstiger ausfallen. Die ermittelte Wahrscheinlichkeitskurve der Neigungsfehler kann also nicht für den einzelnen Beobachtungsstandpunkt, sondern nur näherungsweise für sehr viele Beobachtungen auf vielen Standpunkten gelten. Der Beobachter hat aber die Fehlerwahrscheinlichkeit zu beachten, die für den einzelnen Standpunkt gilt, und diese hängt wesentlich von den Sichtrichtungen ab, in welchen das eilige Beobachtungsverfahren durchgeführt wird. Zuverlässige Annahmen darüber sind unmöglich. Die Wahrscheinlichkeitskurve für den einzelnen Standpunkt läßt sich also nicht genau genug ermitteln, um eine weitere Rechnung zur Feststellung der Wahrscheinlichkeit des ganzen auf einem bestimmten Standpunkt zu befürchtenden Höhenfehlers für das Kreis- oder Reduktionstachymeter zu rechtfertigen Der Beobachter wird daher gut tun, den Maximalfehler in der Weise ungünstig zu berechnen, daß er den Einfluß der größten Libellenneigung mit vollem Betrag zu dem

bei genauer Horizontalstellung des Instruments auftretenden sonstigen Maximalfehler hinzufügt. Nach dieser Regel ist Formel (10) für das Reduktionstachymeter aufgestellt. Für das Kreistachymeter würde sich eine umständliche Formel ergeben. Statt einer solchen ist in (8) eine einfache Näherungsformel mitgeteilt, die für die gewählten Annahmen ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Für die Benutzung der Dosenlibelle kann man die ungünstigere Fehlerwahrscheinlichkeit für den einzelnen Standpunkt auf andere Weise leicht berücksichtigen. Man setzt die mittlere Sichtneigung gleich der mittleren Stehachsenneigung (von 60"). Mit diesem Wert berechnet man den mittleren Höhenfehler $M'_{//}$ und nimmt seinen dreifachen Betrag als Maximalhöhenfehler an. Die beschriebene Rechenregel ist in Formel (4) angedeutet.

Dementsprechend sind die Maximalfehler in Spalte 5 der Tafel 10 ermittelt. Für das Kreistachymeter sind wiederum 2 Instrumentengattungen unterschieden. Spalte 6 enthält für den Maximalfehler die dreifachen Beträge der entsprechenden mittleren. Sie gelten beim Gebrauch von Alhidadenlibelle und Strichmikroskopen, weil in diesem Falle die unbeabsichtigten zufälligen Fehler, deren Wahrscheinlichkeit nach dem Gaußschen Fehlergesetz zu beurteilen ist, weitaus überwiegen. In Spalte 7 dagegen sind maximale Höhenfehler für den Fall angegeben, daß die Höhenkreisablesungen an einem Indexstrich mit einem mittleren Fehler von 1' vorgenommen sind und außerdem freiwillig zugelassene Libellenneigungen bis zu 2' vorkommen. Nach den obigen Erörterungen sollten die durch diese Libellenneigung entstandenen Höhenfehler (hier 5,8 cm auf eine Entfernung von 100 m) mit vollem Betrag zu dem dreifachem Wert des mittleren, für genaue Horizontierung berechneten Höhenfehlers hinzugerechnet werden. Bei genauer Aufstellung des Instru-

ments kommen als zufällige Fehler in Frage: $M'_l = 3{,}4$ mm, $\mu_r = 1{,}8$ cm, Δh in den Größen, die Tafel 4 enthält, endlich als Anteil an M_α ein Ablesefehler am Höhenkreis $\mu_n = 1'$. Demnach würde sich ergeben:

$$\mathfrak{M}'_h = 3 \Big| \frac{k^2}{4} \sin^2 2\alpha\, M'^2_l + \Delta h^2 + \mu_r^2 + e^2 (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 \mu_n^2 + e (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)\, \mathfrak{M}_L$$

Nach dieser unbequemen Formel sind auch die Maximalfehler der Spalte 7 in Tafel 10 berechnet worden. Wie ein Vergleich mit den unmittelbar über ihnen stehenden mittleren Fehlerwerten zeigt, können dieselben Werte genau genug und einfacher nach der empirisch aufgestellten Formel (8) auf S. 125 gefunden werden. Erst bei den größeren Fernrohrneigungen gibt diese Formel Fehler von einigen Centimetern, die aber in Kauf genommen werden können. Die entsprechende Formel für das Reduktionstachymeter läßt sich in der genaueren Form (10) ohne Mühe verwenden. Sie hat die in Spalte 8 der Tafel 10 aufgeführten Maximalfehler geliefert.

Bisher sind nur solche Fehlerwerte berechnet worden, die dem mittleren Ablesefehler $\mu_a = \pm 1{,}5$ mm entsprechen unter Annahme des Verhältnisses $\mu'_a : \mu_a = 1 : 1{,}5$. Um nun auch für andere Werte μ_a einen Überblick über die mittleren und maximalen Entfernungsfehler bei eiligen Messungen mit geringen Fernrohrneigungen zu geben, sind in Fig. 24 berechnete zugehörige Werte dieser Fehler für Ablesefehler μ_a von 0,5 bis 1,5 mm aufgetragen worden. Die Figur zeigt, daß einem gleichmäßigem Wachstum der Ablesefehler auch ein nahezu gleichmäßiges Wachstum der Entfernungsfehler

entspricht. Die Fehler wachsen schneller bei Beobachtungen mit dem Kreis- und Reduktionstachymeter als bei solchen mit dem Gefälltachymeter. Das Wachstum der Höhenfehler hängt vor allem vom Wachstum der Libellenneigung ab.

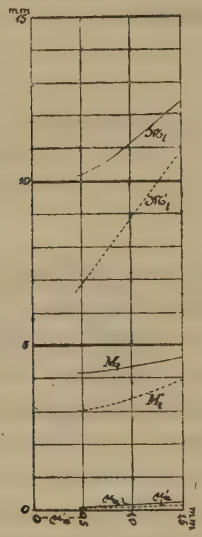


Fig. 24.

Die Aufstellung der verschiedenen Wahrscheinlichkeitsfunktionen liefert noch willkommenen Anlaß zur Prüfung der Frage, ob und wieweit die verschiedenen mittleren Fehler als Genauigkeitsmaße vergleichbar sind. Bei Fehlern, für die das Gaußsche Fehlergesetz gilt, läßt sich aus der Größe ε eines Fehlers und dem zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaß $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ bereits die Größe und Verteilung aller zu befürchtenden Fehler finden, weil sich aus jenen gegebenen Größen das Genauigkeitsmaß h berechnen läßt, sodaß alle Funktionswerte ermittelt werden können. Der aus gegebenen wahrscheinlichen Fehlern besonders leicht und sicher zu berechnende mittlere Fehler liefert daher eine vollkommene Übersicht über die Größen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße a l l e r zu befürchtenden Fehler, falls für diese das Gaußsche Fehlergesetz gilt. Einem bestimmten vielfachen Wert des mittleren Fehlers kommt stets die gleiche Wahrscheinlichkeit zu. Daher lassen sich die procentuellen Fehlergrenzen bei der Gaußschen Funktion so bequem verwerten.

Wie die Ausführungen von S 135 ab zeigen, hängen Größe und Wahrscheinlichkeit der bei e i l i g e n

Beobachtungen zu befürchtenden Lattenablesungsfehler zugleich vom Abrundungsmaß $\frac{i}{2}$ und von der Schätzungsgenauigkeit ab, die durch μ'_a ausgedrückt wird. Ändert sich μ'_a so bleibt doch $\frac{i}{2}$ bestehen. Erst aus beiden Werten setzt sich der mittlere Gesamtfehler M_a zusammen. Seine Größe wird also nicht allein von der Ablesungsgenauigkeit bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens und ebenso auch die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Vielfachen von ihm ändert mit i oder μ'_a ihren Wert. Procentuelle Fehlergrenzen lassen sich für die bei eiligen Messungen zu befürchtenden Lattenablesungsfehler und auch für die von ihnen abhängigen Entfernungsfehler nicht so wie für Fehler sorgfältiger Messungen verwenden. Immerhin aber können sie zu einem Vergleich der verschiedenen Wahrscheinlichkeitskurven dienen. Um diesen Vergleich anschaulich zu machen, sind in Fig. 25 links von der Abscissenachse die für die positiven zufälligen Fehlerwerte gültigen Teile der oben ermittelten Wahrscheinlichkeitsfunktionen mit den vorbenutzten Strichsignaturen aufgezeichnet worden. Die verschiedenen von derselben Abscisse aus aufgetragenen linksseitigen Ordinaten stellen die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsmaße dar, die die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsfunktionen für dasselbe Vielfache des zugeordneten mittleren Fehlers liefern. Anders ausgedrückt: Jede der Wahrscheinlichkeitskurven im linksseitigen Teil der Fig. 25 gilt für den ihr zugeordneten mittleren Fehler »Eins«. Die durch Punktierung dargestellte Gaußsche Funktion hat mehr kleinere, aber auch mehr größere Fehler als die verschiedenen für eilige Lattenbeobachtungen gültigen Funktionen. Letztere zeigen besonders viele Fehler mittlerer Größe im Betrage des mittleren Fehlers und darüber hinaus. Gerade das umgekehrte Verhalten äußert sich bei den beiden zum Vergleich dar-

gestellten, oben ermittelten Wahrscheinlichkeitsfunktionen des Neigungsfehlers. Diese beiden zeigen noch mehr kleine, aber auch noch mehr große Fehler als die Gaußsche Funktion. Die Besonderheiten der Kurven wirken

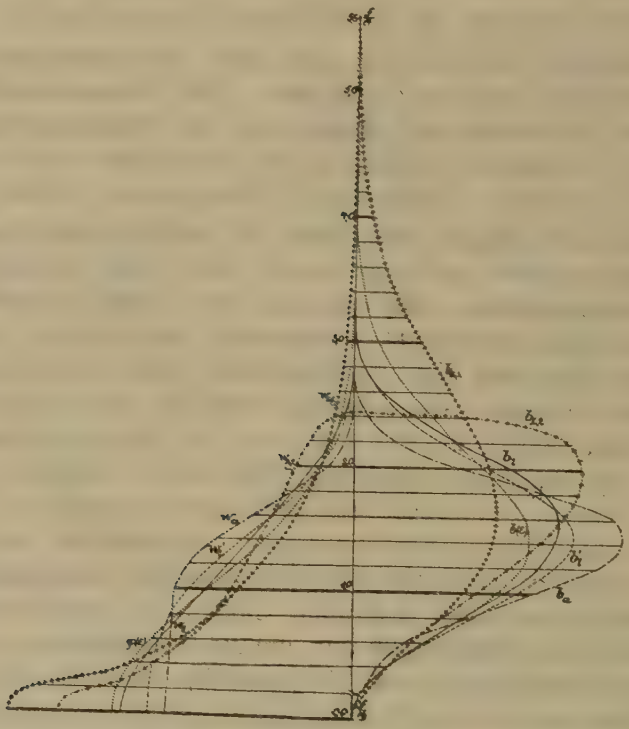


Fig 25

auf das Verhältnis des maximalen zum mittleren Fehler ein. Der Maximalfehler mit der Wahrscheinlichkeitsgrenze nach (9,III) hat bei den Lattenfehlern im Durchschnitt etwa den 2,6fachen, bei den Neigungsfehlern des ersten auf S. 129 beschriebenen Messungsverfahrens hingegen den 3,7fachen Betrag des zugeordneten mittleren Fehlers,

(Doch kann der derart berechnete maximale Höhenfehler nach den Ausführungen auf Seite 157 nicht für den einzelnen Standpunkt, sondern nur näherungsweise für viele Standpunkte gelten).

Ein markantes Unterscheidungsmerkmal der einzelnen Wahrscheinlichkeitsfunktionen liefern die Beiträge, die die einzelnen Fehlergrößen der verschiedenen Fehlergattungen zu dem zugeordneten mittleren Fehler liefern. Diese Beiträge *b* werden im rechtsseitigen Teil der Fig. 25 veranschaulicht. Unter Fehlern, die der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsfunktion folgen, liefern diejenigen in Höhe des 1,36 fachen mittleren Fehlers den größten Beitrag zu dessen Berechnung aus Einzelwerten. Nicht weit davon finden sich auch die Beitragsmaxima der Lattenablese- und Lattenabschnittsfehler bei eiligen Beobachtungen. Die Beitragshöhen an jener Stelle übersteigen aber wesentlich die für die Gaußsche Kurve geltenden. Von den großen Fehlern liefert die Gaußsche Funktion größere Beiträge als die Funktionen, welche sich auf die eiligen Lattenablesungen beziehen. Die größten Beiträge großer Fehler hingegen liefern die Neigungsfehler. An den Beitragskurven zeigt sich also die Häufigkeit der mittleren und großen Fehler besonders deutlich.

Wie die Ausführungen auf S. 157 zeigen, lassen sich die für die Höhenkurven durchgerechneten Wahrscheinlichkeitsfunktionen nicht recht für die Messungspraxis verwerten. Die für die Fehler eiliger Lattenablesungen geltenden Wahrscheinlichkeitsfunktionen ändern sich mit dem Ablesefehler und lassen nicht die Verwendung procentueller Fehlergrenzen zu. Aus diesen Gründen dient eine weitere allgemeine Diskussion der ermittelten Wahrscheinlichkeitsfunktionen nicht dem Zwecke dieser Arbeit. Man muß sich für die Messungspraxis mit einer genäherten Funktionsdarstellung begnügen. Dafür kann

man schlechthin auch die Gaußsche Funktion benutzen. Je größer der Schätzungsfehler μ_u der Lattenablesung ausfällt, umsomehr nähern sich die aus ihm abgeleiteten Wahrscheinlichkeitsfunktionen w_l der Gaußschen. Immer liefern jene für große procentuelle Fehlerwerte geringere Wahrscheinlichkeitsbeträge als die Gaußsche Funktion sie liefern würde. Der Beobachter urteilt daher ungünstig, wenn er die Gaußsche Funktion auch für die Lattenfehler eiliger Messungen zugrunde legt und befürchtet größere Fehler als sie der Theorie entsprechend eintreffen müßten. Das aber muß den Beobachter veranlassen, in zweifelhaften Fällen lieber sorgfältige Beobachtungen auszuführen. Für die Wahl des Messungsverfahrens ist es also zweckmäßig, die Gaußsche Funktion für die Beurteilung der Fehlerhäufigkeit zugrunde zu legen. Macht man, so wie es bei dem auf S. 129 zuerst angegebenen Verfahren für die Benutzung der Dosenlibelle angenommen wurde, auch die Höhenfehler lediglich vom Zufall abhängig, so kann man auch für diese die Gaußsche Wahrscheinlichkeitsfunktion zugrunde legen, falls man statt der wirklichen Neigungsfehler ν nur deren größte Beträge, die Stehachsenfehler σ, einführt. Man kann auch dann, wie auf S. 158 bereits angegeben, den dreifachen Betrag von M_σ unbedenklich als Maximalfehler $\mathfrak{M}_L$ annehmen. Nur für den Fall eines möglichst genau abgemessenen Maximalbetrages von ν mittels Röhrenlibelle darf man die Gaußsche Funktion nicht zugrunde legen; man kann dann aber auch die Berechnung eines mittleren Fehlers entbehren, da sein Wert als Genauigkeitsmaß mit mittleren Fehlern, die aus anderen Beobachtungsverfahren gefunden sind, schlechthin kaum vergleichbar ist. Jedenfalls dürfte die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion zur näheren Erklärung seiner Bedeutung nicht entbehrlich sein.

Nun mag auch noch die Richtungsbestimmung bei eiligen Beobachtungen kurz Erwähnung finden. Es versteht sich von selbst, daß in Anbetracht der nach Taf. 10 zu befürchtenden großen Entfernungsfehler im allgemeinen eine genäherte Richtungsbestimmung durch Schätzung am Indexstrich und selbst ohne Schätzung lediglich durch Ablesung des nächstgelegenen Limbusstriches ausreicht. Der Punktfehler der Lage wird dadurch nicht wesentlich erhöht.

Bei eiligen Beobachtungen kann man mit noch größerem Recht als bei sorgfältigen annehmen, daß die durch Aufnahmefehler hervorgerufene Punktlage im ungünstigsten Fall durch die Grundkreisumfänge eines Zylinders gekennzeichnet ist, dessen Grundkreise den Halbmesser $\mathfrak{M}_e$ haben und dessen Höhe gleich $2\,\mathfrak{M}_h$ ist.

Abschnitt VI.

Schlußbetrachtungen.

In den vorhergehenden Abschnitten ist versucht worden, die für die geodätische Benutzung wichtigen Eigenschaften dreier Tachymeter und die aus den Eigenschaften folgenden Arbeits- und Genauigkeitsverhältnisse der mit diesen Instrumenten ausgeführten Messungen erschöpfend darzulegen. Die gewonnenen Ergebnisse kenn-

zeichnen die Leistungsfähigkeit der behandelten Instrumente. In der Einleitung fand sich, daß sie im wesentlichen von dem Verwendungsbereich, der Schnelligkeit des Arbeitsfortschritts und der Genauigkeit der Aufnahme abhängt. Nach diesen drei Gesichtspunkten ist also nunmehr eine Zusammenfassung der Ergebnisse erwünscht. Hauptsächlich müssen die Genauigkeitsverhältnisse betrachtet werden. Im Vorstehenden sind sowohl für den Entfernungsfehler, der zugleich den Punktfehler der Lage bedingt, wie auch für den Höhenfehler Genauigkeitsmaße aus unmittelbar gemessenen Größen hergeleitet, die zumeist unter mittleren Beobachtungsverhältnissen gefunden worden waren. Die gewonnenen Genauigkeitszahlen können zu Vergleichen dienen, sie besitzen indessen auch einen gewissen selbständigen Wert. Mangels anderer aus eigenen Beobachtungen ermittelter Genauigkeitsmaße kann ein mit einem der drei behandelten Instrumente arbeitender Beobachter die in den Tafeln 9 und 10 niedergelegten Werte der Wahl seines Messungsverfahrens zugrunde legen. Nach dem in der Einleitung angegebenen Vorschlag kann er sich die bei eiligen Beobachtungen zu befürchtenden Maximalfehler merken und in zweifelhaften Fällen die betreffenden Aufnahmepunkte von den aus den Maximalfehlern gebildeten Fehlerkörpern umschlossen denken. Er erkennt dann unmittelbar an Ort und Stelle aus dem Messungszweck, ob solche Maximalfehler in Kauf genommen werden dürfen. Nur wenn das der Fall, sind eilige Messungen zu empfehlen, denn dann braucht er nur noch mit der sehr geringen Wahrscheinlichkeit von 1:370 die Überschreitung des Maximalfehlers zu befürchten. Ist der nach Taf. 10 zu bildende maximale Fehlerkörper nicht erlaubt, so wird es besser sein, sorgfältige Messungen vorzunehmen. Bei derartiger ohne Mühe schnell ausführbarer Überlegung nutzt der Beobachter die Vorteile punktweiser Aufnahme wirklich aus.

Sucht der Instrumentenbeobachter nicht selbst die Aufnahmepunkte aus, sondern ein leitender Ingenieur oder Landmesser, so kann der Beobachter durch ein verabredetes Zeichen leicht auf das erwünschte Aufnahmeverfahren aufmerksam gemacht werden. Da die dreifachen Werte der in Taf. 9 aufgeführten Genauigkeitsmaße als Maximalfehler für sorgfältige Beobachtungen gelten können, so lassen diese auch einen Schluß zu, ob in einem gegebenen Falle überhaupt tachymetrische Messung ausreicht. Es ist zu bedenken, daß die Fehler bei ungünstigen Beobachtungsverhältnissen, z. B. bei starker Refraktion, leicht noch um ein Viertel größer ausfallen können.

Aus dem Vergleich der mittleren und noch mehr aus dem der maximalen Fehler nach den Taf. 9 und 10 erkennt man, daß bei großen Fernrohrneigungen eilige Messungen nicht viel größere Fehler erwarten lassen, als sorgfältige. Der Grund dafür liegt hauptsächlich in dem großen Einfluß der Lattenneigungsfehler. Man kann daher vornehmlich an Aufnahmegenauigkeit dadurch gewinnen, daß man sich dem Aufnahmepunkt nach Entfernung und Höhe möglichst nähert und sorgfältig mißt. Große Entfernungen können indessen durch sorgfältige, d. h. durch Millimeterbeobachtungen nicht genauer bestimmt werden, als durch Centimeterbeobachtungen, weil sich auf großen Entfernungen Millimeter nicht mehr genügend scharf abschätzen lassen. Die Grenze, bis zu welcher Millimeterablesungen von Wert sind, liegt bei der Verwendung des Kreistachymeters auf etwa 150, bei der des Gefälltachymeters auf 200 m, wie ein Vergleich der betr. Maximalfehler erkennen läßt. Bei großen Entfernungen sind zur Verkleinerung der Höhenfehler aber alle diejenigen Maßnahmen besonders von Wert, die eine Verringerung des Neigungsfehlers herbeiführen.

Je kupierter das Gelände ist, um so besser müssen die Einrichtungen für die Erhaltung der lotrechten Lattenstellung sein, um so mehr komnt es auf die Gewissenhaftigkeit des Lattenhalters an. Bei dem starken Wachstum des Lattenneigungsfehlers aber kann selbst die größte Vorsicht noch nicht ausreichend erscheinen. Wir haben es hier mit einem wunden Punkt der Tachymetrie mit lotrechter Lattenhaltung zu tun. Da die aufrechte Lattenhaltung senkrecht zur Fernrohrsicht fast allgemein wieder verlassen ist und da sie sich auch nicht für Reduktionstachymeter mit selbsttätiger Höhenreduktion eignet, so wird es nötig sein, bei Verbesserungsbestrebungen auf die französischen Tachymeterkonstruktionen mit wagrechter Lattenhaltung zurückzukommen. Hammer hat bereits die Beachtung der französischen Einrichtungen empfohlen. Wir werden am Schluß einen Vorschlag für ein Reduktionstachymeter mit wagrechter Lattenhaltung vorlegen.

Während die Längenfehler bei sorgfältigen Beobachtungen mit allen drei Instrumenten als nahezu übereinstimmend angenommen werden können, sind doch bei eiligen Beobachtungen wesentlich größere Längenfehler mit dem Gefälltachymeter zu befürchten als mit den beiden anderen Instrumenten. Der Grund dafür liegt darin, daß mit dem Gefälltachymeter keine Einstellungen auf feste Lattenmarken, sondern nur Ablesungen an beliebigen Lattenstellen möglich sind. Für flaches Gelände, für welches das Gefälltachymeter konstruiert ist, kann indessen der größere Längenfehler im allgemeinen in Kauf genommen werden.

Dem Gefälltachymeter ist indessen auch ein besonders starkes Wachstum des Höhenfehlers eigen, selbst wenn der Lattenneigungsfehler nicht in Betracht gezogen wird. Das gilt sowohl für sorgfältige wie auch für eilige Beobachtungen. Bei letzteren wird jene Eigen-

tümlichkeit zum Teil durch die oben bereits erwähnte Art der Lattenablesung bedingt. Es treten aber noch andere Ursachen hinzu, die für die Durchbildung von Verbesserungsvorschlägen beachtet werden müssen. Die Betrachtung der Formeln (6), (6*) und (7) des I. Abschnitts sowie der Formeln (12) und (13) des III. Abschnitts lehrt, daß eine dieser Ursachen in dem schnellen Wachstum der Konstanten $m = k \operatorname{tg} \alpha$ zu suchen ist. Dies läßt sich indessen nicht vermeiden, wenn Wert darauf gelegt wird, daß die Konstanten m möglichst kleine ganze Zahlen werden. Nun wachsen nach der Taf. 5 die Höhenfehler verschieden stark, je nachdem ein merkbarer Schraubeneinstellungsfehler auftritt oder nicht. Besonders bei älteren Gefälltachymetern, bei denen sich wohl nicht selten Schraubenfehler einstellen dürften, wird also der Höhenfehler noch dadurch vergrößert, daß die Konstante m zu jeder Beobachtung von der horizontalen Richtung aus durch zwei Einstellungen abgemessen werden muß und nicht an einer festen Skala genau bestimmt werden kann, etwa wie beim Omnimeter. Eine entsprechende ungünstige Wirkung wie die zufälligen zeigen in dieser Hinsicht auch die periodischen Schraubenfehler. Bei eiligen Beobachtungen kann man gegenüber dem Kreistachymeter mit Alhidadenlibelle noch eine (freiwillig zugelassene) Fehlerquelle darin erblicken, daß sich ein Neigungsfehler bei der schrägen Fernrohrsicht nicht ebenso leicht erkennen läßt wie bei der wagerechten. Wir werden darnach zu trachten haben, vornehmlich die zuletzt aufgeführten Fehlerquellen auszuschalten, ohne die Einfachheit der Konstruktion aufzugeben.

Das Gefälltachymeter zeigt also seinen Charakter als Nivellierinstrument nur bei geringen Fernrohrneigungen und sorgfältigen Beobachtungen. Bei solchen kann es geradezu als Schrägnivellierinstrument gelten. Es ist dann dem Kreistachymeter überlegen, da es genauere

Ergebnisse bei bequemerer Beobachtungsweise und Rechnung liefert. Diese Verwendbarkeit des Gefälltachymeters zu Schrägnivellements bedingt schon eine wesentliche Überlegenheit gegenüber dem Nivelliertachymeter, das nur für horizontale Sichten gebraucht werden kann. Schrägnivellements lassen sich, wenn man von einer Wiederholung der Messung absieht, zwar nicht so genau durchführen wie Horizontalnivellements. Für den einzelnen durch Schrägnivellement bestimmten Höhenunterschied ergibt sich der mittlere Fehler unter Benutzung von (13,III) aus $\mu_H\sqrt{2}$. Wird derselbe Höhenunterschied durch ein Horizontalnivellement bestimmt, so sind statt eines Standpunktes deren n erforderlich und der mittlere Fehler ergibt sich unter Benutzung von (14,III) aus $\mu_H\sqrt{2n}$. Dieser Wert wird in der Regel kleiner sein als jener, weil er in weit höherem Maße eine Aufhebung von Fehlern zuläßt. Dennoch genügt das Schrägnivellement in der Regel überall da, wo lediglich technische Zwecke in Frage kommen. Da es nur $\frac{1}{n}$ der Standpunkte erfordert, die für ein Horizontalnivellement nötig sind, so läßt es sich sehr viel schneller als dieses ausführen und muß für technische Zwecke im allgemeinen vorgezogen werden. Man wird dann aber den Lattenabschnitt $O - U = l$ möglichst groß wählen, weil sich nach (18*,III) der mittlere Fehler nahezu proportional mit der Vergrößerung von l verkleinert.

Entprechend genaue Höhenmessungen wie mit dem Gefälltachymeter, jedoch mit größeren Fernrohrneigungen dürften sich höchstens mit dem Eckholdschen Omnimeter ausführen lassen, das aber die einfache Bauart des Nivellierinstrumentes schon völlig vermissen läßt und bereits als Spezialtachymeter angesehen werden muß. Als solches kann es aber wiederum wegen der umständlicheren Messungsweise bei

größeren Fernrohrneigungen und überall da, wo eine mindere Genauigkeit ausreicht, bei weitem nicht mit dem Hammer-Fennelschen Reduktionstachymeter in Wettbewerb treten. Ein Blick auf Tafel 9 und 10 zeigt nun, daß das Reduktionstachymeter wiederum bei geringen Fernrohrneigungen beträchtliche Höhenfehler befürchten läßt. Es macht sich mithin eine Lücke in dem Vorrat an Tachymeterkonstruktionen bemerkbar. Es fehlt ein Tachymeter, das als Schrägnivellierinstrument für möglichst steile Sichten noch möglichst genaue Höhenmessungen erwarten und das doch auch bei eiligen Messungen nicht allzuviel Einbuße an Genauigkeit befürchten läßt. Wir werden versuchen, Vorschläge für eine solche Konstruktion auszuarbeiten. Zur Entscheidung der Frage, ob das Kipp- oder Doppelsichtverfahren geeigneter erscheint, wollen wir beide kurz vergleichen: Kipptachymeter lassen sich einfach konstruieren und gewähren einfache, bequeme Ausrechnung der gesuchten Werte. Die Messung ist allerdings bei dem Doppelsichtverfahren die einfachere. Die vollkommensten Einrichtungen für die Doppelsichtmessung enthält das Hammer-Fennelsche Reduktionstachymeter; sie gewähren zugleich bequeme einfache Messung und Rechnung. Aber einen Vorteil, den das Kippverfahren bietet, können Sie nicht gewähren. Doppelsichtmessungen lassen allgemein nicht die Verwendung möglichst kleiner Konstanten k und m oder, was dasselbe sagt, möglichst großer Lattenabschnitte l zu. Das ergibt sich bereits aus den Ausführungen auf S. 94. Daher erscheinen Verbundkonstruktionen für das Kipp- u. Doppelsichtverfahren durchaus berechtigt. Zur Wahrung der Einfachheit der Konstruktionen dürfte es sich nun aber nicht empfehlen, so wie es mehrfach geschehen ist, die üblichen Einrichtungen der Kipp- und Doppelsichttachymeter an einem Instrument nebeneinander zu vereinigen Wir wollen vielmehr eine harmonische Verbindung beider

Konstruktionsprinzipien erstreben. Dabei haben wir, wie die obigen Erörterungen zeigen, zugleich darnach zu trachten, daß Schraubenfehler nach Möglichkeit vermieden werden, daß sich Neigungsfehler auch bei schräger Sicht erkennen lassen und daß eins der Maße *O* oder *U* eingestellt werden kann. Ferner ist die Verwendung größerer Fernrohrneigungen erwünscht. Die Zusammenstellung der Konstruktionen im I. u. II. Abschnitt zeigt zur Genüge, daß das Prinzip der Verwendung fester, der Fernrohrneigung zugeordneter Bildmarken für die Lattenmaße *O* und *U* die vollkommenste Ausbildung des Doppelsichtverfahrens zuläßt Solche Bildmarken müssen sich offenbar auch für das Kippverfahren verwenden lassen. Wir werden daher dieses Princip auch der Ausarbeitung einer neuen Konstruktion zu Grunde zu legen haben. Eine fernere Betrachtung des Hammer-Fennelschen Tachymeters und des Kreistachymeters wird noch weitere Anhaltspunkte für die Lösung der gestellten Aufgabe bieten.

Das mit Alhidadenlibelle und Schätzmikroskop ausgerüstete Kreistachymeter liefert nach Ausweis durch die Taf. 9 und 10 für mittlere und große Fernrohrneigungen die größte Genauigkeit der Höhenmessung bei sorgfältigen Messungen. Bei eiligen Messungen läßt es allgemein für Längen- und Höhenmessungen die kleinsten Fehler erhoffen. Die Gründe dafür sind vorher bereits berührt worden. Die Höhenbestimmung mittels Höhenkreis nebst Orientierung durch Alhidadenlibelle, sowie die Möglichkeit, die Höhenbestimmung bei beliebiger Fernrohrneigung, also auch nach festen Lattenpunkten vorzunehmen, erweist sich als besonders zweckmäßig. Ungünstig ist die umständliche Ausrechnung der Entfernungen und Höhen. Mit Rücksicht auf die Ausführungen auf S. 170 kann man auch noch einen ferneren Mangel der Konstruktion des Kreistachymeters darin erblicken, daß die Höhen nicht durch Schrägnivellement, sondern

durch trigonometrische Höhenmessung bestimmt werden.

Gegenüber den vorbehandelten Tachymetern weist das Hammer-Fennelsche verhältnismäßig grosse Höhenfehler bei geringen Fernrohrneigungen auf. Die Ursache dafür liegt hauptsächlich in der Größe der Höhenkonstanten m, ferner aber auch in dem Umstand, daß Neigungsfehler bei geneigter Sicht nicht erkannt werden können. Dem letzten Übelstand dürfte nun leicht abzuhelfen sein, dadurch daß der Rahmen mit dem Diagramm D (Fig. 12) eine Alhidadenlibelle erhält, mit dem der Mittelradius KO jederzeit lotrecht gestellt werden kann. Ein Vergleich der Höhenfehler für das Gefäll- und Reduktionstachymeter zeigt, daß für ein Schrägnivellierinstrument möglichst kleine Konstanten m erwünscht sind. Ein Wechsel in deren Größe dürfte keinen besonderen Nachteil mit sich bringen, wenn nur einstellige Zahlen und Vielfache von 10 verwendet werden.

Wie bereits im III. Abschnitt ausgeführt wurde, lassen sich systematische Fehler beim Kreistachymeter am leichtesten tilgen oder doch konstant erhalten. Beim Gefälltachymeter kann die Gefällschraube eine Quelle für störende systematische Fehler werden. Durch Justierung kann man sich ihrer nicht erwehren. Eine rechnerische Berücksichtigung macht Umstände. Am leichtesten können beim Reduktionstachymeter systematische Fehler eintreten und mit Rücksicht darauf ist es erwünscht, daß dessen Justierungseinrichtungen noch Abänderungen erfahren. Die Anbringung einer Alhidadenlibelle ist schon erwähnt worden. Nach den Ausführungen auf S. 72 ist eine Änderung der Konstanten k und m nicht ausgeschlossen. Ihre Prüfung und Berichtigung auf Grund vergleichender Latten- und Distanzmessung ist mühsam und während der tachymetrischen Aufmessung störend. Es dürfte sich daher empfehlen, dicht vor der Ablese-

kante $J—J$ des Prismas P_2 (Fig. 8) parallel zu CC und um p' entfernt noch einen zweiten Faden als Distanzfaden einzufügen. Der Abstand p' möge gleich oder ein wenig kleiner als $f:100$ sein. Dann wird es eine bestimmte Fernrohrneigung α' geben, bei welcher der Faden mit dem Bild E' der Entfernungskurve gerade an der Prismenkante zur Deckung kommt. Für diese Fernrohrneigung α' muß dann die reduzierte Konstante $e:l = k = 100$ sein. Diese dem Fadenabstand p' zugeordnete Fernrohrneigung α' läßt sich leicht, etwa durch Kontaktstriche an der Kippachse, festlegen. Große Genauigkeit ist dazu wegen der geringen Änderung von p_e mit wachsendem α nicht erforderlich. Mit der beschriebenen Einrichtung läßt das Reduktionstachymeter eine wesentlich schnellere Prüfung der reduzierten Konstanten k zu als jetzt, denn es braucht nur bei der Fernrohrneigung α' geprüft zu werden, ob das Bild E' der Entfernungskurve mit dem festen Distanzfaden an der Prismenkante zusammenfällt.

Verfasser hält ferner eine Verlegung der Prismenkante JJ an die Seite der Fadenebene und die Einziehung eines oder zweier Vertikalfäden für erwünscht, damit das Reduktionstachymeter auch zu Winkelmessungen und Ablotungen gut brauchbar wird. Vorteilhaft wäre es, solchen Abstand der Prismenkante vom Vertikalfaden zu wählen, daß zwischen den Visuren durch beide Striche ein runder Winkelwert von etwa 10' eingeschlossen würde. Diese Winkeldifferenz kann für eilige Messungen vernachlässigt werden. Sie läßt sich, falls das überhaupt nötig wird, bei sorgfältigen Messungen leicht berücksichtigen. Die Einziehung von Vertikalfäden wird immerhin den Verwendungsbereich des Reduktionstachymeters erweitern, da ein Ziel genauer zwischen zwei Fäden eingestellt werden kann als längs einer undurchsichtigen Wandung. Für Nivellierzwecke läßt sich das Reduktionstachy-

meter mit Benutzung der Fernrohrlibelle bereits verwenden. Bei der Justierung mittels Wendelibelle muß indessen die Exzentricität des Fernrohrs gegen die Kippachse (30 mm) berücksichtigt werden.

Zum Bau eines Schrägnivellierinstruments für möglichst kleine Konstanten m dürfte sich die Hammersche Idee wenig eignen. Hammer gibt auch ausdrücklich an, daß die Konstruktion nur für das von ihm mit »TII« bezeichnete eiligere Messungsverfahren der Tachymetrie dienen solle. Indessen läßt sich wohl die von Fennel angewandte Bildverschiebung auch für ein tachymetrisches Schrägnivellierinstrument mit kleinen Höhenkonstanten verwenden, bei dem sich die meisten der nach S. 171/172 zu erstrebenden Konstruktionsziele erreichen lassen. Die Figuren 26 bis 29 sollen die Konstruktion eines solchen Instruments erläutern. Fig. 26a zeigt einen Horizontalschnitt durch das Fernrohr S, Fig. 26b eine Seitenansicht des Oberteils vom Instrument mit Fernrohr, Kippachse K und Höhenkreis D, Fig. 27 enthält eine Ansicht der Bildebene. Die Figuren 28 und 29 sollen zur Erläuterung der Theorie des Instrumentes dienen und dessen beide mögliche Verwendungsarten als Kipp- und Doppelsichttachymeter erklären.

Über der Kippachse K des Fernrohrs S, dicht neben demselben ist der Höhenkreis D aus Glas fest und gegen Witterungseinflüsse geschützt angebracht. Schutzhülle und Alhidadenlibelle sind in den Figuren nicht dargestellt. Der Höhenkreis trägt eine photographisch übertragene Einteilung mit Höhenwinkeln α, deren Tangentenwerte gleichmäßig wachsen. Den vorliegenden Zwecken entsprechend würde sich für die konstante Tangentendifferenz der Wert $\Delta \operatorname{tg} \alpha = 0{,}01$ empfehlen, sodaß der Höhenkreis eine Strichteilung für die Winkel 0, arc tg 0,01 ; arc tg 0,02 ; arc tg 0,03 usw. enthalten würde. Von dieser Einteilung wird durch ein Prismen-Linsen-System

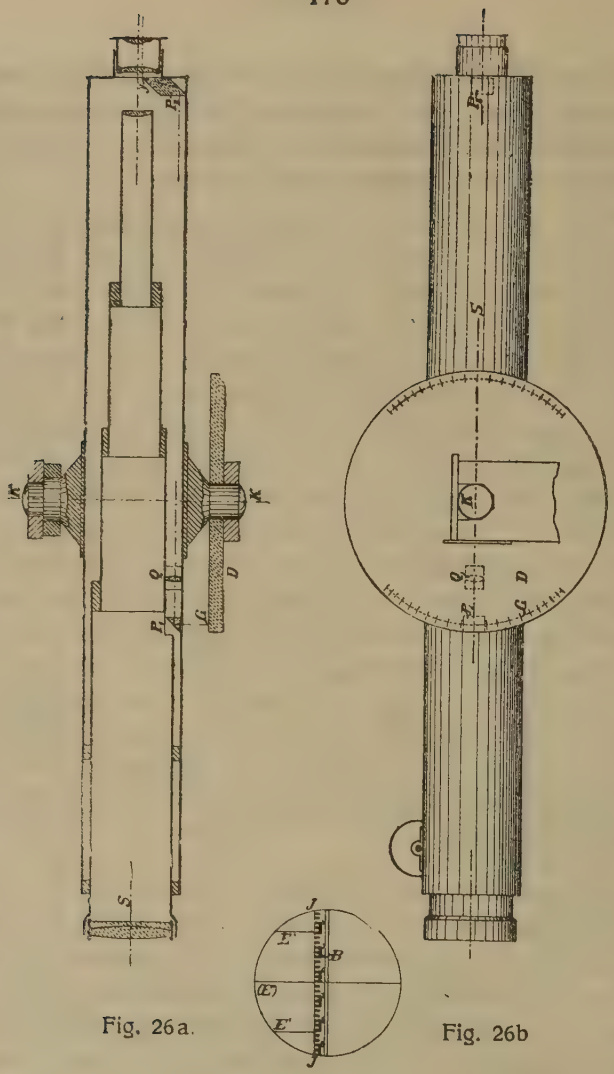


Fig. 26a. Fig. 26b

Fig. 27.

$P_1 Q P_2$ nach Art des von Fennel verwandten ein reelles Bild in der Bildebene bei J erzeugt, und zwar fällt auf die Prismenkante JJ (Fig. 27) das Bild eines kurzen, nahezu als Gerade zu betrachtenden Teiles des Kreis-

bogens G. Nahezu senkrecht zu JJ erscheinen die Bilder $E'E'$ der Tangententeilung des Höhenkreises. Wird das Fernrohr auf die Latte gerichtet, so daß deren reelles Bild B in der Bildebene dicht neben der Prismenkante JJ erscheint, so kann man an den Strichbildern E' als Indexstrichen Lattenablesungen vornehmen.

Distanzmessungen werden bei dieser Konstruktion auf zweierlei Weise ermöglicht. Erstens kann man nach einander den Horizontalfaden des Fernrohrs auf zwei benachbarte Strichbilder E' einstellen und jedes Mal an der Latte ablesen, wie es in Fig. 28 angedeutet ist.

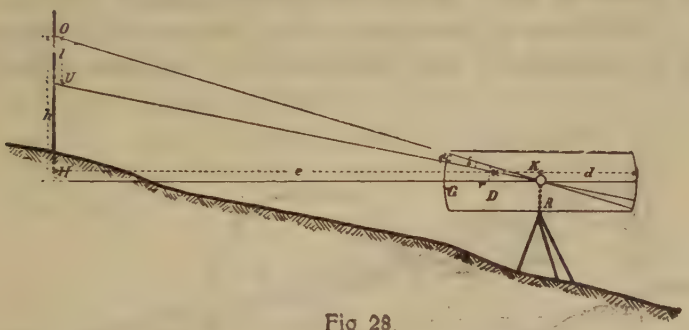


Fig 28.

Dann hat das Fernrohr offenbar einen derartigen Neigungsunterschied δ erhalten, daß $\triangle \operatorname{tg}\alpha$ gleich dem konstanten, der Höhenkreisteilung zu Grunde gelegten Wert 0,01 ist. Setzt man $1 : \triangle \operatorname{tg}\alpha = 100 - k$, so hat man dieselben Rechnungen zur Auffindung der Entfernungen und Höhen durchzuführen, wie sie auf S. 28/29 für das Kipptachymeter beschrieben worden sind. Ein Vergleich der linksseitigen Teile der Fig. 1 und 28 zeigt bereits die Gemeinsamkeit der betr. Beziehungen.

Zweitens kann man aber auch die Entfernungen und Höhen nach dem Princip des Doppelsicht-Distanzmessers messen und berechnen. Es läßt sich, wie der

Vergleich mit dem Hammer-Fennelschen Tachymeter zeigt, eine derartige Gesichtsfeldgröße schaffen, daß stets zwei oder mehr Strichbilder E' ohne bemerkbare Verzerrung an der aufrechten Prismenkante bei J abgebildet werden. Sie bilden Indexmarken für Parallelstrahlen im eigentlichen Fernrohr zwischen Objektiv und Okular. Diese Strahlen legen, wie auf S. 24/25 beschrieben, einen Winkel δ und einen Lattenabschnitt OU (Fig. 6) fest. Man kann also, wenn man will, bei beliebiger Fernrohrlage zwei Lattenablesungen O und U vornehmen und aus deren Unterschied l nach (3,I) die Entfernung e oder — falls das Fernrohr kein Porrosches Objektivsystem besitzt — die Entfernung e' berechnen. Der letztere Fall ist in Fig. 29 dargestellt. Die Sehachse S ist mit einem Strich-

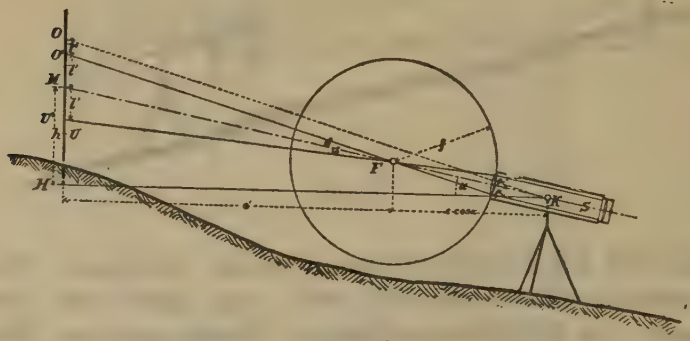


Fig. 29.

bild zur Deckung gebracht. Die zugehörige Lattenablesung ist M. Die Lattenablesungen neben den benachbarten Strichbildern sind O' und U'. Die Differenzen $O'-M$ und $M-U'$ müssen übereinstimmend gleich l' sein. Mit Porroschem Fernrohr würden die entsprechenden Lattenablesungen auf O, M und U fallen und den Unterschied l ergeben. Die Abweichung $l-l'$ soll später berechnet werden.

Es ist nun offenbar sehr zweckmäßig, die beiden Konstanten k für die Messungen mittels des Kipp- und Doppelvisurverfahrens in Übereinstimmung zu bringen. Das läßt sich durch geeignete Wahl und Stellung der Linse Q erreichen, die die längs des Kreises G (Fig. 26) abgemessenen Strichabstände p' auf die Strichbildabstände p vergrößert. Um dies zu zeigen, genügt es, von der Realisierung der optischen Abbildung abzusehen und lediglich rein geometrische Abbildungsverhältnisse für eine unendlich dünne Linse mit zusammenfallenden Haupt- und Knotenpunkten zu Grunde zu legen. Es möge der Halbmesser des Kreises G mit r, die Brennweite des Fernrohrobjektivs mit f, die der Mikroskoplinse Q mit f' bezeichnet werden. Sollen die bei beiden Messungsverfahren zu verwendenden Konstanten k übereinstimmen, so müssen die sie erzeugenden zugeordneten entfernungsmessenden Winkel δ gleiche Größe haben, d. h. es muss sein:

(1) $p' : r = p : f$ (Vergl. Formel 2,I).

Daraus folgt:

$$p' : p = r : f$$

Das Verhältnis $p' : p$ drückt nun offenbar die Lateralvergrößerung aus, die die Linse Q hervorruft. Bezeichnen a und b Objekt- und Bildweite für die Abbildung durch die Linse Q, so wird bekanntlich:

$$p' : p = a : b$$

Demnach entsteht:

(2) $$a : b = r : f$$

$$a : (a+b) = r : (r+f)$$

$a+b$ ist die konstante Länge C des durch die Prismen P_1 und P_2 gebrochenen Lichtstrahlweges zwischen der Objektstrecke p' und der Bildstrecke p. Bei Verwendung des Wertes C ergibt sich:

$$(3) \qquad a = \frac{r \cdot C}{r + f}$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$b = \frac{f \cdot C}{r + f}$$

Demnach kann die auf absolute Längenmaße bezogene dioptrische Hauptformel

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f'}$$

geschrieben werden:

$$\frac{r + f}{r \cdot C}\left(1 + \frac{r}{f'}\right) = \frac{1}{f'}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $r \cdot C \cdot f \cdot f'$ ergibt sich:

$$(4) \qquad f' = \frac{r f C}{(r + f)^2}$$

Dieselbe Formel muß offenbar auch gelten, wenn f nicht die Brennweite des Objektivs im einfachen astronomischen Fernrohr, sondern die äquivalente Brennweite des Porroschen anallaktischen Fernrohrs bezeichnet. Bei der beschriebenen Konstruktion ist es indessen wohl möglich, auf die Beigabe des anallaktischen Fernrohrs zu verzich-

ten, wenn man die geringe Mühe nicht scheut, jeden durch Ablesung bestimmten Lattenabschnitt l' um ein Maß l'' zu vergrößern, das außer von konstanten Werten lediglich von der Fernrohrneigung abhängt. Wie Fig. 29 zeigt, verhält sich:

$$l'' : l' = c \cdot \cos\alpha : e$$

Genau genug ist $e : l' = k$, so daß

$$(5) \qquad l'' = \frac{c \cdot \cos\alpha}{k}$$

wird. Für den mittleren Wert $c = 0{,}4$ m nimmt l'' von 4 auf 3,5 mm ab, während α von 0 auf 30° anwächst. Demnach kann l' genau genug überall gleich groß angenommen werden. Ein anallaktisches Fernrohr würde das Maß

$$(6) \qquad l = l' + l''$$

unmittelbar als Differenz der Lattenablesungen liefern, wie bereits erwähnt wurde. Für genaue Höhenmessungen mit einfachem astronomischen Fernrohr ist es nötig, den Mittelfaden mit einem Strichbild zur Deckung zu bringen. Man erhält nach Vorstehendem wohl $h = lm$ genau, nicht aber O oder U. Geht dagegen die Sehachse durch ein Strichbild, so entspricht die Lattenablesung M der Höhenkonstanten m, die durch die Fernrohrneigung festgelegt ist. Den Umstand, daß sich l beim Kipp- und Doppelvisurverfahren gleichlautend ergeben muß, kann man offenbar sehr bequem zur jederzeitigen Prüfung und Justierung der Lage der Linse Q längs der Fernrohrachse und der Bildebene bei J benutzen, denn die Kippmessung liefert richtige Ergebnisse auch dann, wenn Q und J nicht genau die Sollagen einnehmen; sie kann also zur Prüfung der Doppelvisurmessung dienen.

Zur Berechnung von Abmessungen, die der Ausführung der Konstruktion zugrunde gelegt werden könnten, mag von den Abmessungen des Hammer-Fennelschen Tachymeters ausgegangen werden. Bei ihm ist $f = 335$ und $C = 200$ mm gewählt. Wird r versuchsweise zu 50 mm und C zu $200 + 50 = 250$ mm gesetzt, so folgt aus (4): $f' = 28{,}2$ mm. Der größte Wert von p' ergibt sich zu $50 \cdot \text{arc tg } 0{,}01 = 0{,}5$ mm. Aus (1) findet sich der größte Wert von p zu 3,35 mm oder $f:100$. Formel (3) liefert $a = 32{,}5$ mm, demnach wird $b = 217{,}5$ mm.

Bei der bisher beschriebenen Einrichtung gelten als Höhenkonstanten die ganzen Zahlen 1; 2; 3 usw., ganz so wie beim Gefälltachymeter. Sie stellen zugleich die kleinsten bequemen Höhenkonstanten dar, die im allgemeinen für das Doppelvisurverfahren in Frage kommen können. Es steht aber nichts im Wege, mit dem Kippverfahren durch Verwendung größerer Neigungsunterschiede noch kleinere Konstanten zu schaffen. Die Lattenabschnitte werden dann größer. Es entstehen die Vorteile, die bereits für das Gefälltachymeter auf S. 30 und 94 angedeutet wurden. Die vorgeschlagene Vereinigung des Kipp- und Doppelvisurverfahrens ist also von praktischem Wert.

Kleine Konstanten sind für sorgfältige Messungen erwünscht, für eilige sind runde Werte m', z. B. 10; 20; 50, ausreichend und der bequemeren Produktbildung wegen vorzuziehen. Sie lassen sich auch bei der vorgeschlagenen Konstruktion verwenden. Dazu ist nur notwendig, daß außer den auf dem Höhenkreis aufgetragenen Neigungswinkeln α (nach S. 175) im Anschluß an diese noch diejenigen Neigungen α_1 durch Striche kenntlich gemacht werden, deren Tangenten um $1:m'$ größer oder kleiner sind als $\text{tg}\,\alpha$. Für den in den Formeln (4) bis (6) des I. Abschnitts enthaltenen Wert $\text{tg}\,\alpha$ ist dann zu setzen:

(7) $$\triangle \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{m'} \operatorname{tg} \alpha$$

Setzt man diesen Ausdruck in (5,I) ein und verwendet den erhaltenen Wert von e' zur Berechnung von h aus (6,I) so entsteht, wenn die kleine Konstante c verschwindet:

$$h = l \cdot m' \qquad \text{(vergl. 7,I).}$$

Zur Verwendung der runden Höhenkonstanten m' wird das Instrument am besten mit anallaktischem Fernrohr ausgerüstet, denn der Wert k in (5) behält nicht mehr durchgehends dieselbe Größe; l'' ändert sich also mit der Fernrohrneigung. Bei der Auswahl der Höhenkonstanten im einzelnen ist darauf zu achten, daß der Lattenabschnitt, der sich für die Höhenbestimmung ergibt, höchstens e: 100 beträgt, damit bei einer Lattenlänge von 4 m noch auf größere Entfernungen von 200 m mindestens 2 zugehörige Strichbilder auf das Lattenbild entfallen.

Die Brauchbarkeit der ganzen Konstruktion muß im wesentlichen von der Genauigkeit der photographisch herzustellenden Höhenkreisteilung und der Schärfe der Striche abhängen. Die Strichschärfe wird außer von chemischen Einflüssen im wesentlichen von der Korngröße der photographischen Platte bestimmt. Nach Miethe (Zeitschrift für Instrumentenkunde 1912 S.190) kann man bei Platten, die für die vorliegenden Zwecke besonders präpariert sind, auf eine Korngröße von etwa 0,001 mm rechnen. Nehmen wir dementsprechend an, daß sich die Strichstärke nur auf etwa 0,002 mm scharf herstellen ließe, so würde dieses Maß bei der versuchsweise gewählten Größe des Höhenkreishalbmessers von $r = 50$ mm auf das $\frac{335}{50} = 6{,}7$ fache, d. h. auf 0,013 mm vergrößert

werden. Vergrößert das Okular noch etwa 15fach, so würde der einzelne Strich 0,2 mm stark erscheinen. Das dürfte für die vorliegenden Zwecke schon reichlich groß sein. Der Höhenkreishalbmesser darf daher nicht kleiner als 50 mm gewählt werden. Indessen erscheint die Konstruktion wohl ausführbar. Bei der Wahl der Höhenkonstanten m' muß noch darauf geachtet werden, daß die Strichintervalle nicht zu schmal werden.

Nach den angegebenen Gesichtspunkten sind die Neigungswinkel der Tafel 12 berechnet worden. Der kleinste Winkel zwischen benachbarten Strichen beträgt 66,5". Bei $r = 50$ mm würde demnach der kleinste Strichabstand $\frac{50 \cdot 66{,}5}{206265} = 0{,}016$ mm betragen. Es kann angenommen werden, daß dessen Ränder noch scharf auf die Platte kommen. Nur Versuche können darüber sicheren Aufschluß geben. Einesteils um sehr schmale Intervalle zu vermeiden, anderenteils um nicht die sehr große Konstante 100 für die Höhen anwenden zu müssen, sind für größere Neigungen als arc tg 0,48 nur von jedem zweiten Teilstrich ab Neigungsintervalle für die Höhenberechnung mittels m' vorgesehen. Dies dürfte umsomehr genügen, als ja die Höhenberechnung jederzeit auch ohne die Konstanten m' vorgenommen werden kann.

Nach der bisherigen Beschreibung der Konstruktion treten Schraubenfehler nicht auf. Neigungsfehler bei schräger Sicht können beim Vorhandensein einer Alhidadenlibelle am Höhenkreis vermieden werden. Alle

Fernrohrneigungen, die in der Praxis in Frage kommen, lassen sich verwenden, und zwar können zur Höhenberechnung die kleinsten ganzzahligen Höhenkonstanten benutzt werden. Indessen werden keine Latteneinstellungen, sondern nur Ablesungen vorgenommen und zwar an wenigen, ganz bestimmten Lattenstellen, die vom Instrument aus festgelegt sind. Darin liegt zweifellos ein Übelstand, den die Konstruktion mit sich bringt, denn jene Lattenstellen können durch Sichthindernisse verdeckt sein. Es muß daher eine Gefällschraube zur Ermöglichung von Zwischeneinstellungen oder -Ablesungen geeigneter Lattenmaße angebracht werden. Mit ihrer Hilfe lassen sich beliebige Zwischenablesungen U und O nach dem Kippverfahren vornehmen. Es ist nur nötig, nach Feststellung des Fernrohrklemmarms Schraubenablesungen bei den Einstellungen des Fernrohrs auf U, O und die beiden benachbarten Strichbilder vorzunehmen. Dann lassen sich die benutzten Werte $\Delta \operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{tg} \alpha$ durch Interpolation finden und mit ihrer Hilfe e und h aus (5,I) und (6,I). Mit Anbringung einer Gefällschraube ist eine vielseitige Anwendbarkeit des Instruments geschaffen, die beim Hammer-Fennelschen Tachymeter nicht in gleicher Weise vorliegt. Bei ihm kann man wohl beliebige Zwischeneinstellungen U vornehmen, legt damit aber zugleich die Lattenpunkte O fest. Im Gebüsch kommt es immerhin vor, daß zugehörige Lattenstellen U und O nicht der freien Sicht zugänglich sind.

Der Entwurf in der bisher vorgelegten Form gibt noch keinen Anhalt zur Vermeidung der unangenehmen Lattenneigungsfehler, die bei größeren Fernrohrneigungen alle Mühe des Beobachters völlig vereiteln können. Diese Lattenneigungsfehler sind bekanntlich geringer, wenn als Sollage der Latte nicht die lotrechte, sondern die schiefe, senkrecht zur Sicht gerichtete eingeführt wird. Man erhält die Lattenneigungsfehler für die schiefe Lattenhal-

Tafel 12. Winkel für gleiche Tangentenunterschiede.

tg α_e	α_e	tg α_h	α_h	tg α_e	α_e	tg α_h	α_h
$k = 100$; $m' = 10$				$h = 100$; $m' = 50$			
0,00	0	0,00	0	0,49	26° 6' 17,5"		
0,01	0° 34' 22,6"	0,011	0° 37' 48,8"	0,50	26 33 54,2	(0,51)	
0,02	1 8 44,7	0,022	1 15 37,1	0,51	27 1 17,7		
0,03	1 43 6,1	0,033	1 53 24,3	0,52	27 28 27,9	0,5304	27° 56' 29,3"
0,04	2 17 26,2	0,044	2 31 9,8	0,53	27 55 24,9		
0,05	2 51 44,7	0,055	3 8 53,1	0,54	28 22 8,6	0,5508	28 50 45,5
0,06	3 26 1,1	0,066	3 46 33,8	0,55	28 48 38,9		
0,07	4 0 15,0	0,077	4 24 11,1	0,56	29 14 55,8	0,5712	29 44 6,0
0,08	4 34 26,1	0,088	5 1 44,7	0,57	29 40 59,3		
0,09	5 8 34,0	0,099	5 39 13,9	0,58	30 6 49,4	0,5916	30 36 30,8
0,10	5 42 38,1	(0,11)		0,59	30 32 26,2		
$k = 100$; $m' = 20$				0,60	30 57 49,5	0,612	31 27 59,9
0,11	6° 16' 38,3"	0,1155	6° 35' 18,5"	0,61	31 22 59,5		
0,12	6 50 34,0	0,126	7 10 53,1	0,62	31 47 56,1	0,6324	32 13 33,3
0,13	7 24 24,9	0,1365	7 46 22,2	0,63	32 12 39,3		
0,14	7 58 10,6	0,147	8 21 45,3	0,64	32 37 9,3	0,6528	33 8 11,4
0,15	8 31 57,6	0,1575	8 57 2,0	0,65	33 1 25,9		
0,16	9 5 25,0	0,168	9 32 11,9	0,66	33 25 29,3	0,6732	33 56 54,4
0,17	9 38 53,0	0,1785	10 7 14,5	0,67	33 49 19,5		
0,18	10 12 14,3	0,189	10 42 9,6	0,68	34 12 56,5	0,6936	34 44 42,6
0,19	10 45 28,7	0,1995	11 16 56,6	0,69	34 36 20,4		
0,20	11 18 35,8	(0,21)		0,70	34 59 31,3	0,714	35 31 36,6
				0,71	35 22 29,1		

$k = 100$; $m' = 50$

0,21	11°	51'	35,2"	0,2142	12°	5'	24,2"	0,72	35°	45'	14,0"	0,7344	36°	17'	36,8"
0,22	12	24	26,7	0,2244	12	38	51,6	0,73	36	7	46,0				
0,23	12	57	10,0	0,2346	13	12	10,2	0,74	36	30	5,2	0,7548	37	2	43,8
0,24	13	29	44,6	0,2448	13	45	19,8	0,75	36	52	11,6				
0,25	14	2	10,5	0,2550	14	18	20,0	0,76	37	14	5,4	0,7752	37	46	58,3
0,26	14	34	27,2	0,2652	14	51	10,6	0,77	37	35	46,6				
0,27	15	6	34,5	0,2754	15	23	51,2	0,78	37	57	15,2	0,7956	38	30	20,7
0,28	15	38	32,1	0,2856	15	56	21,6	0,79	38	18	31,5				
0,29	16	10	19,8	0,2958	16	28	41,6	0,80	38	39	35,3	0,816	39	12	52,0
0,30	16	41	57,3	0,3060	17	0	50,8	0,81	39	0	26,9				
0,31	17	13	24,4	0,3162	17	32	49,0	0,82	39	21	6,3	0,8364	39	54	32,8
0,32	17	44	40,8	0,3264	18	4	36,1	0,83	39	41	33,6				
0,33	18	15	46,4	0,3366	18	36	11,6	0,84	40	1	49,0	0,8568	40	35	23,9
0,34	18	46	40,9	0,3468	19	7	35,6	0,85	40	21	52,3				
0,35	19	17	24,2	0,3570	19	38	47,6	0,86	40	41	43,9	0,8772	41	15	26,0
0,36	19	47	56,0	0,3672	20	9	47,7	0,87	41	1	23,8				
0,37	20	18	16,1	0,3774	20	40	35,4	0,88	41	20	52,0	0,8976	41	54	40,1
0,38	20	48	24,4	0,3876	21	11	10,8	0,89	41	40	8,7				
0,39	21	18	20,8	0,3978	21	41	33,6	0,90	41	59	14,0	0,918	42	33	7,0
0,40	21	48	5,1	0,4080	22	11	43,7	0,91	42	18	7,9				
0,41	22	17	37,1	0,4182	22	41	40,8	0,92	42	36	50,6	0,9384	43	10	47,4
0,42	22	46	56,7	0,4284	23	11	25,1	0,93	42	55	22,2				
0,43	23	16	3,7	0,4386	23	40	56,1	0,94	43	13	42,7	0,9588	43	47	42,2
0,44	23	44	58,2	0,4488	24	10	13,9	0,95	43	31	52,3				
0,45	24	13	39,9	0,4590	24	39	18,4	0,96	43	49	51,1	0,9792	44	23	52,4
0,46	24	42	8,7	0,4692	25	8	9,5	0,97	44	7	39,1				
0,47	25	10	24,7	0,4794	25	36	47,0	0,98	44	25	16,6	0,9996	44	59	18,7
0,48	25	38	27,6	0,4896	26	5	10,9	0,99	44	42	43,5				
								1,00	45	0	0,0				

tung genau genug, wenn man in Formel 3* des III. Abschnitts $\alpha = 0$ setzt. Nun lassen sich aber die Lattenhaltungsfehler noch mehr verringern, wenn als Solllage die wagerechte gewählt wird. Zugleich werden dann auch, wie in der Einleitung bereits erwähnt wurde, die großen Fehler der Höhenrefraktion vermieden. An ihre Stelle treten die wesentlich geringeren der Seitenrefraktion. Es ist nun nicht zu verkennen, daß die wagrechte Lattenhaltung auch Schattenseiten hat. Man muß erwarten, daß Messungen mit wagrechter Latte viel häufiger durch Hindernisse gestört werden als solche mit lotrechter Latte. Zwischen Bäumen ist häufig ein lotrechter Spalt für die Sicht nach einer aufrechten Latte frei, nur viel seltener werden sich indessen genügend Durchblicke finden, die zwei oder mehr Ablesungen nach einer wagrechten Latte gestatten. Daher läßt sich die aufrechte Lattenhaltung nicht entbehren. Die auf sie gegründeten Betrachtungen bleiben in Geltung. Aber es sind Erwägungen darüber am Platze, ob nicht die Vorteile der wagerechten Lattenhaltung bei dem vorgelegten Entwurf berücksichtigt werden können.

In Frankreich werden wagerechte Latten in verschiedenen Ausführungen verwendet. Immer ist die wagerechte Latte an einer längeren lotrechten drehbar befestigt. Gewöhnlich liegen beide Latten übereinander; nur zur Beobachtung werden sie gegeneinander zu einem Kreuz verdreht. Der Drehpunkt ist im allgemeinen längs der aufrechten Latte verschiebbar und wird am besten gleich der Aufstellungshöhe des Instruments gewählt. Die wagerechte Latte muß durch eine Dioptervorrichtung senkrecht zur Sicht gestellt werden. Das Tachymeterfernrohr erhält aufrechte Distanzfäden. Zwischen ihnen erscheint das Bild des Lattenabschnitts l. Bei horizontaler Sicht gelten dann die Formeln (1) bis (3) des ersten Abschnitts. Bei geneigter Sicht aber liefern die Aus-

drücke lk und $c + lk$ nicht e selbst, sondern nur $e : \cos\alpha$, sodaß

(8) $$e = lk \cos\alpha$$

wird. Unter Berücksichtigung von (6,I) findet sich

(9) $$h = l \cdot k \cdot \sin\alpha$$

Der Lattenhaltungsfehler fällt sehr klein aus, wenn die linke und rechte Sicht symmetrisch zur lotrechten Latte gerichtet sind. In Fig. 30 ist die lotrechte Latte in M*)

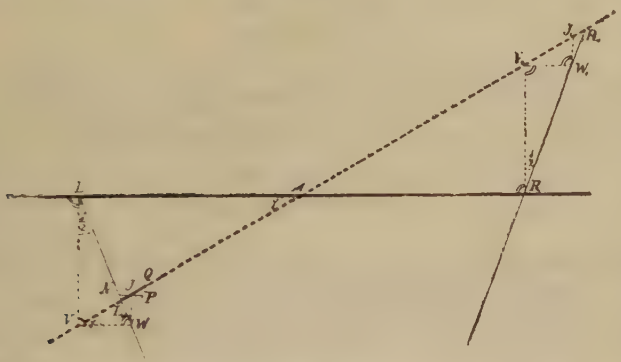


Fig. 30.

stehend gedacht. LR ist der gesuchte Lattenabschnitt l; $L_1 R_1 = l_1$ ist der bei fehlerhafter Lattenhaltung und wagrechter Sicht beobachtete. In der Figur sind LV und $RV_1 \perp LR$, sodann sind VW und $V_1 W_1 \parallel LR$, ferner WJ und $W_1 J_1 \perp LR$, endlich ist $WQ \parallel RR_1$ gezogen. Es ergibt sich nun leicht aus der Kongruenz entsprechender Dreiecke:

$$l_1 = L_1 R_1 = JJ_1 + L_1 Q = VV_1 + L_1 Q = \frac{l}{\cos\gamma} + L_1 Q$$

Bei der Kleinheit des Winkels γ ist genau genug $\cos\gamma = 1$. Mithin gibt $\triangle l = L_1 Q$ den Lattenhaltungsfehler an. Nach der Figur ist:

*) M soll die Mitte des Lattenabschnitts LR sein.

$$WJ = VW \cdot \operatorname{tg}\gamma = LV \cdot \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\operatorname{tg}\gamma = \frac{l}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\gamma$$

und $NP = 2\,WJ \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$. Offenbar ist genau genug $\triangle l = L_1 Q = \frac{NP}{\cos\gamma}$. Wiederum kann $\cos\gamma = 1$ gesetzt werden, ebenso $\operatorname{tg}\gamma = \gamma$ und $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$. Benutzt man die vorher gefundenen Werte für NP und WJ, so entsteht:

$$\triangle l = l \cdot \gamma^2 \frac{\delta^2}{4}$$

Ebenso wie für lotrechte Lattenhaltung gilt auch hier $\triangle l : l = \triangle e : e = \triangle h : h$. Mithin ergibt sich:

(10) $$\triangle e = e\,\gamma^2 \frac{\delta^2}{4}$$

Schon dieser Fehler kann wegen der Kleinheit der Winkel γ und δ völlig vernachlässigt werden und noch mehr der Fehler $\triangle h$, für den eine entsprechende Formel gilt.

Auch bei wagerechter Lattenhaltung kann man Bildstrecken p im Tachymeterfernrohr, welche α zugeordnet sind, verwenden, um als Objektstrecken gleiche Horizontalentfernungen und gleiche Höhen zu erhalten.

Ist das Fernrohr anallaktisch, so kann man die einschlägigen Beziehungen aus Fig. 7 erkennen, wenn man die Objektstrecke $U_1 O_1$ als Umklappung des Lattenabschnitts aus der wirklichen, wagerechten Lage in die lotrechte Zeichnungsebene betrachtet. Aus der Figur folgt:

$$\delta_e = \frac{p_e}{f} = \frac{l_e \cdot \cos\alpha}{e}$$

Somit ergibt sich unter Berücksichtigung von (3,I):

(11) $$p_e = \frac{f}{k} \cdot \cos\alpha$$

Entsprechend findet sich:

$$\delta_h = \frac{p_h}{f} = \frac{l_h \cdot \cos \alpha}{e} = \frac{l_h \cdot \sin \alpha}{h},$$

wenn zugleich (6,I) verwandt wird. Unter Einsetzung von $h : l_h = m$ entsteht daher:

(12) $$p_h = \frac{f}{m} \sin \alpha.$$

Die Bildstrecken p liegen bei wagerecht gehaltener Latte auch wagerecht. Man könnte nun unter Anlehnung an die Fennelsche Konstruktion Endmarken für die Bildstrecken p als Bilder eines auf dem Höhenkreis aufgetragenen Meßbildes an einer wagerechten Prismenkante optisch erzeugen. Wie aber vorher festgestellt wurde, wird es oft zweckmäßig sein, bei derselben Messung nebeneinander die wagerechte und lotrechte Lattenhaltung anzuwenden. Es müßte dann die Fennelsche Konstruktion an demselben Instrument zweimal verwendet werden, getrennt für die lotrechte und wagerechte Lattenhaltung. Solche Konstruktion erscheint offenbar nicht mehr zweckmäßig. Man kann nun aber wohl die optische Übertragung des Meßbildes ganz entbehren und das Meßbild auf dem Höhenkreis unmittelbar in die Bildebene bringen, wenn die Sehachse des Fernrohres gebrochen wird.

Eine derartige Konstruktion ist in Fig. 31 und 32 entworfen. Die Fig. 31a bis 31c zeigen den Oberbau des Instruments etwa in der Anordnung, wie das Kreistachymeter sie enthält. Oberhalb des mit der Stehachse verbundenen Horizontalkreises H ist auf den Trägern J die Kippachse K gelagert. Sie trägt das anallaktische Fernrohr, dessen Sehachse $S_1\ S_2\ S_3\ S_4$ infolge der Einfüh-

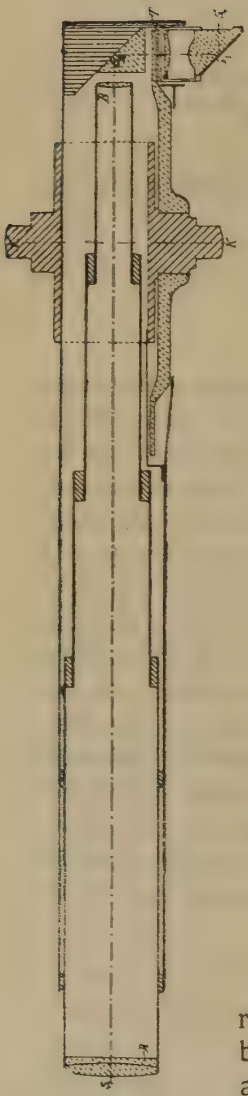


Fig. 31 a.

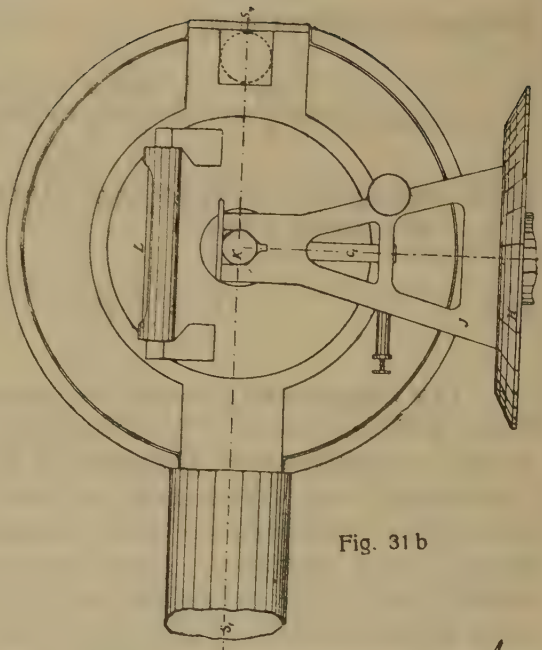


Fig. 31 b

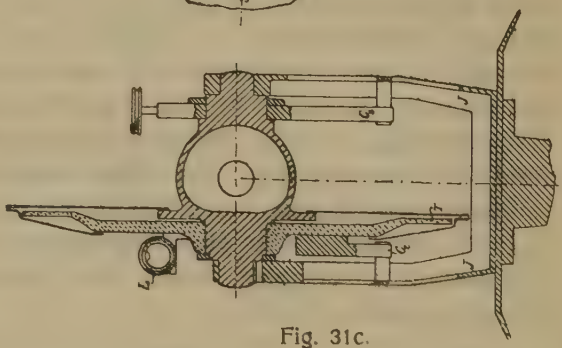


Fig. 31 c.

rung der Prismen bei S_2 und S_3 zweifach gebrochen ist. Ein- und Austritt der Sehachse bei S_1 und S_4 sind parallel zueinander versetzt. Zur Einstellung des Fernrohres wird das Objektivsystem mit den Linsen A und B verstellt. Die Bildebene

befindet sich in der vorderen Fläche eines an der Höhenkreisscheibe befestigten Glasplättchens T, das das photographisch hergestellte Meßbild trägt. Auf diesem Plättchen erscheinen also zugleich Latten- und Messbild aufeinander. Das Gesichtsfeld des Fernrohrs wird nicht eingeengt oder gar, wie beim Hammer-Fennelschen Tachymeter, zur Hälfte verdeckt. Die Höhenkreisplatte T wird gleichsam zum Fernrohr zugezogen und gegen Lichtstrahlen von außen völlig geschützt. Die besondere Linse zur Herstellung von Strichbildern und die durch deren Verschiebung entstehenden Fehler fallen also fort.

Das unmittelbar in der Bildebene gelagerte Meßbild kann nach Erfordernis Tangententeilung und Diagramm zur unmittelbaren Ablesung von Entfernungen und Höhen aufnehmen. Fig. 32 zeigt ein solches Meßbild. Es enthält die von dem Grundkreis G beiderseits je zur Hälfte abgetragenen, aus (11) und (12) berechneten Bildstrecken p_e und p_h. Ihre Werte sind nicht besonders zahlenmäßig aufgeführt, weil sie proportional den Kreisfunktionen Sinus und Cosinus sind, die unmittelbar aus Tafeln entnommen werden können. Die Entfernungskonstante wird auch für die wagerechte Lattenhaltung am besten zu $k=100$ gewählt. Für die

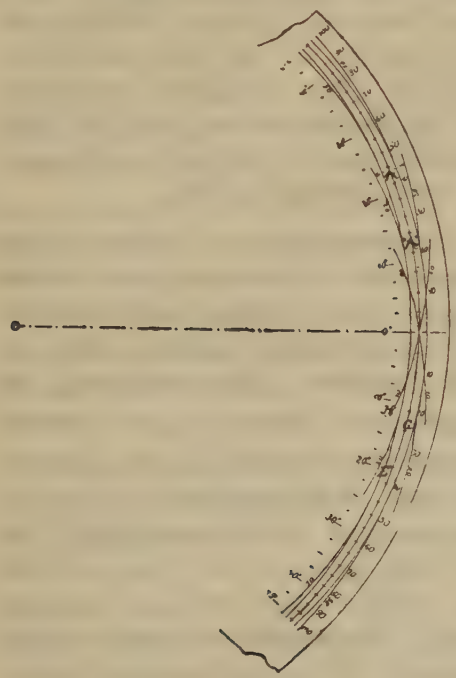


Fig. 32.

großen Fernrohrneigungen empfiehlt es sich, die Höhenkonstante $m = 50$ anzunehmen. Für die mittleren Neigungen kann $m = 20$, für die kleinen $m = 10$ und noch kleiner gesetzt werden. Um das Diagramm für den praktischen Gebrauch übersichtlich zu halten, dürfen nur wenige Werte m für die wagerechte Lattenhaltung angenommen werden. Die Verwendung einer Strichteilung statt der Diagrammkurven empfiehlt sich für die wagerechte Lattenhaltung nicht, weil jedes Strichintervall bei bestimmter Höhenkonstante einer bestimmten Fernrohrneigung, also auch einer bestimmten Höhenlage der wagerechten Latte entspricht. Das jedesmalige Einrichten dieser Höhenlage vom Instrument aus würde unnötig viel Zeit beanspruchen. Bei wagerechter Lattenhaltung lassen sich auser durch das Doppelsichtverfahren auch durch Drehung um die Stehachse bequem Entfernungen messen, wenn zur Feinstellung in der Horizontalebene eine feine Meßschraube mit einer Ganghöhe verwendet ist, die dem $k$ten Teil des Achsabstandes gleich ist. Solch Verfahren mit Horizontaldrehung ist bereits von Sanguet eingeführt, wie auf S. 45/46 erwähnt wurde.

Für die lotrechte Lattenhaltung ist die Anbringung einer Strichteilung vorteilhaft. Sie kann ganz in der oben beschriebenen Weise nach Höhenwinkeln erfolgen, deren Tangentenwerte gleichmäßig wachsen, also die Winkel α_c der Tafel 12 enthalten. Die Auftragung der in dieser Tafel aufgeführten Winkel α_h ist entbehrlich. Wird das Fernrohr unter Vermittlung des Klemmarms C_s Fig. (31 c) durch Feinbewegung so gekippt, daß die Sehachse nacheinander durch benachbarte Teilstriche der Tangententeilung geht, so ist $\triangle \operatorname{tg} \alpha = 1 : 100$. Entfernung und Höhe können also nach den einfachen Formeln (3) und (7) des I. Abschnittes berechnet werden, wobei $k = 100$ ist, während für m die kleinsten Zahlen-

werte 1, 2, 3 usw. gelten. Ist die Feinstellschraube des Klemmarms C_s zugleich eine Gefällschraube, die die Voglerschen Bedingungen (S. 24) erfüllt, so lassen sich auch beliebige Zwischenwerte für m (und k) benutzen, wie auf S. 185 ausgeführt wurde.

Das Tachymeter läßt aber auch die Entfernungs- und Höhenmessung für lotrechte Lattenstellung nach dem Doppelvisurverfahren zu. Für diesen Zweck ist es vorteilhaft, den Radius des Grundkreises G, längs dessen die Lattenablesungen vorzunehmen sind, als $n$ten Teil (etwa zu $\frac{1}{5}$) der Brennweite des Objektivsystems zu wählen. Bestimmt man dann den Lattenabschnitt für n (5) aufeinanderfolgende Strichintervalle, liest also die Latte an einem beliebigen und dem $n$ten (fünften) darauf folgenden Teilstrich ab, so ist bei anallaktischem Fernrohr das $k$fache der Ablesung $O - U$ gleich der Entfernung. Die Höhe h kann man nach (6,I) berechnen, indem man $\operatorname{tg}\alpha$ auf irgend einen, etwa den obersten der $n+1$ (6) Teilstriche bezieht. Das Maß h gilt dann für die zugehörige Lattenablesung. Auch in diesem Falle gilt $k = 100$. Für $\operatorname{tg}\alpha = m : 100$ kommen nur einfache, höchstens zweistellige Konstanten in Frage.

Als erster Anhalt für die Darstellung in den Fig. 31 und 32 ist der Abstand c der Linsen A und B zu 365 mm, die Brennweite f_a der Linse A zu 385 mm, die der Linse B zu $f_b = 195$ mm gewählt worden. Als äquivalente Brennweite f des Objektivsystems ergibt sich dann nach der bekannten Formel (Jordan, Hdb. der Vermessungskunde II).

$$f = \frac{f_a \cdot f_b}{f_a + f_b - c}$$

$f = 349$ mm. Der fünfte Teil davon ist als Radius des Diagramms der Fig. 32 gewählt worden. Der sog. anallaktische Punkt, der Scheitelpunkt des Winkels δ, liegt von A um das Maß (s, Jordan, H. d. V.),

$$b = \frac{f_a(c - f_b)}{f_a + f_b - c}$$

d.h. um 304 mm entfernt, ändert aber um einige Centimeter seine Lage infolge der Verschiebung des Objektivsystems.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, daß die zuletzt vorgelegte Tachymeterkonstruktion eine Längenmessung nach dem Kipp- und Doppelsichtverfahren sowohl für lotrechte wie für wagrechte Lattenhaltung zuläßt. Die Höhenmessung kann bei lotrechter Lattenhaltung mittels beider Verfahren, bei wagrechter Lattenhaltung ohne Erweiterung der Konstruktion nur mittels des Doppelsichtverfahrens vorgenommen werden. Bei Verwendung eines anallaktischen Fernrohres kommen in jedem Falle die einfachen Formeln (3) und (7) des I. Abschnitts in Frage. Die Fehlerfortpflanzung wird bei allen Messungsverfahren durch die Gleichungen (11,III) und (13,III) ausgedrückt, wenn in denselben $\mu_s = 0$ gesetzt wird. Eine Einstellung der Sicht auf eine bestimmte Lattenmarke, die besonders zur Erhöhung der Genauigkeit bei eiligen Messungen beitragen würde, läßt sich bei der vorgelegten Konstruktion nur für die wagrechte Lattenhaltung erreichen. Die Konstruktion kann also wohl bei eiligen Messungen mit lotrechter Lattenhaltung nicht ganz die Leistungsfähigkeit der Hammer-Fennelschen aufweisen, in allen anderen Fällen aber dürfte sie diese übertreffen. Das Instrument erscheint vielseitig verwendbar. Es stellt eine Verbindung von Theodolit, Nivellierinstrument und Tachy-

meter dar und könnte vielleicht bei geeigneter Wiederholung der Messung zur Längenermittelung von Polygonseiten bei Grenzaufmessungen ausreichen. Es würde sich zu Schrägnivellements besser als die bisher bekannten Instrumente verwenden lassen, weil es weniger Fehlerquellen als diese aufweist. Es könnte in mehrfacher Weise als Spezialtachymeter verwendet werden und ließe besonders für sorgfältige Beobachtungen verhältnismäßig genaue Ergebnisse bei bequemem Meß- und Rechenverfahren erhoffen. Die vorgelegte Konstruktion scheint demnach bauwürdig zu sein. Ihr großer Verwendungsbereich kann vielleicht dazu dienen, daß die Tachymetrie auch für kleine Geländeaufnahmen zur Anwendung gelangen wird, für die zur Zeit die Beschaffung eines Spezialtachymeters nicht rentabel ist. Selbstverständlich läßt sich ein endgültiges Urteil über eine neue Konstruktion erst nach deren Ausführung fällen. Die vorstehenden Erörterungen sollten nur zur Auffindung der Konstruktion dienen, die die zweckmäßigste zu sein scheint, und das ist die zuletzt beschriebene.

Druckfehler-Berichtigung.

Auf S. 38 gilt statt der dargestellten Fig. 7 die nachstehende:

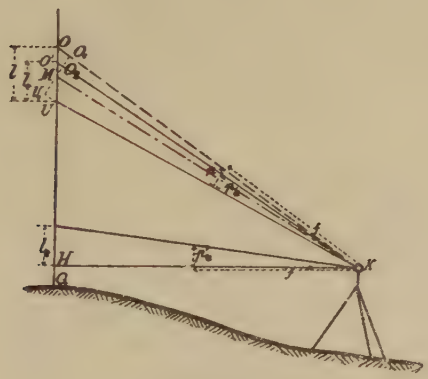


Fig 7

Auf S. 111, Zeile 8 und 9 v. o. lies statt »Zeile der vorstehenden«: »Spalte der nachstehenden«.

Benutzte Literatur.

Czuber, E., Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig 1891.

Dörgens, R., Neues Tachymeter mit Tangentenschraube. Zentralblatt d. Bauverwaltung 1900 S. 458.

Eggert, O., Einführung in die Geodäsie. Leipzig 1907.

Engroff, Horizontalkurven in Hessen. Zeitschrift für Vermessungswesen 1899 S. 61.

Friedrich, J., Das optische Distanzmessen. Wien 1881.

Goulier, C. M., Etudes theorétiques et pratiques sur les levers topométriques. Paris 1892.

Hagen, G., Wahrscheinlichkeitsrechnung. 3. Aufl. Berlin 1882 und 1884.

Hammer, Beiträge zur Praxis der Höhenaufnahmen. Z. f. Vermessungswesen 1891 S. 193.

„ Zur Geschichte der Distanzmessung. Z. f. Vermessungswesen 1891 S. 295.

„ Der Hagersche Tacheograph. Z. f. Instrumentenkunde 1894 S. 242.

„ Das Eckholdsche Omnimeter in der Ausführung von A. Ott in Kempten. Z. f. Instrumentenkunde 1895 S. 233.

„ Zur Geschichte der Distanzmessung. Z. f. Instrumentenkunde 1897 S. 278.

„ Entwurf eines Tachymetertheodolits zur unmittelbaren Lattenablesung von Horizontaldistanz und Höhenunterschied. Z. f. Instrumentenkunde 1898 S. 241.

„ Tachymetertheodolit zur unmittelbaren Lattenablesung von Horizontaldistanz und Höhenunterschied. Z. f. Vermessungswesen 1901 S. 153.

Hammer, Neue Genauigkeitsversuche mit einem Hammer-Fennelschen Tachymeter-Theodolit. Z. f. Vermessungswesen 1903 S. 691.

„ Über die Näherungen bei Anwendung des Fadendistanzmessers in der Tachymetrie. Z. f. Vermessungswesen 1905 S. 721.

Helmert, Ein Beitrag zur Erkenntnis der Genauigkeit der Distanzmessung mittels des Tachymeters von G. Starke in Wien. Z. f. Vermessungswesen 1874 S. 325.

„ Bemerkungen zu dem Aufsatz von Stambach: „Über die Genauigkeit der Distanzmessung". Z. f. Vermessungswesen 1875 S. 359.

„ Der Einfluß der schiefen Stellung der Latte usw. Z. d. österr. Ingenieur- und Architektenvereins 1875 S. 154.

„ Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2. Aufl. Leipzig 1907.

Hunaeus, Die geometrischen Instrumente. Hannover 1863 und 1864.

Jordan, Mitteilung über die Genauigkeit der Distanzmessung mit einem neuen, vom Mechaniker Hahn in Cassel konstruierten Schraubeninstrument. Z. f. Vermessungswesen 1875 S. 362.

„ Besprechung v.: Friedrich „Das optische Distanzmessen." Z. f. Vermessungswesen 1882 S. 398.

„ Adjustierung eines Tachymeters. Z. f. Vermessungswesen 1883 S. 430.

„ Besprechung von: „Logarithmisch-tachymetrische Tafeln f. d. Gebrauch d. logarithm. Tachymeters nach Patent Tichy und Starke". Z. f. Vermessungswesen 1893 S. 156.

„ Tachymeter-Theodolit mit Celluloidhöhenbogen. Z. f. Vermessungswesen 1896 S. 14 und 1899 S. 50.

Jordan, Besprechung von: „Einiges über Distanzmesser mit besonderer Berücksichtigung unseres Differential-Distanzmessers in Verbindung mit unserem Universal-Tacheograph von Victor v. Ziegler und Karl Hager. Luxemburg 1893". Z. f. Vermessungswesen 1893 S. 549.

„ Aufnahme von Horizontalkurven. Z. f. Vermessungswesen 1899 S. 201.

„ Handbuch der Vermessungskunde. 2. Band. 3. und 7. Auflage. Stuttgart 1888 und 1908.

Klingatsch, A., Fadentachymeter mit Mikrometerschraube von R. u. A. Rost. Z. f. Instrumentenkde. 1905 S. 305.

Koppe, Der Hammer-Fennelsche Tachymeter-Theodolit und die Tachymeter-Kippregel. Z. f. Vermessungswesen 1902 S. 144.

Kummer, Genauigkeit der Abschätzung mittels Nivellierfernrohrs. Z. f. Vermessungsw. 1894 S. 129.

Kunze, Über die Genauigkeit der Distanzmessung mit Hilfe der Tangentenschraube. Z. f. Vermessungswesen 1901 S. 349.

Láska, W., Tachymeter Láska-Rost. Z. f. Instrumentenkde. 1905 S. 225.

Laussedat, A., Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques I. Paris 1898.

Miethe, A., Über stark verkleinerte photographische Aufnahmen für meßtechnische Zwecke. Z. f. Instrumentenkunde 1912 S. 190.

Ott, A., Tichys logarithmischer Tachymeter von Tichy und Ott. Z. f. Instrumentenkunde 1893 S. 144.

Petzold, Das Sanguetsche Tachymeter. Z. f. Vermessungswesen 1896 S. 144.

„ Einige Versuche mit dem Sanguetschen Tachymeter. Daselbst S. 700.

Puller, Kreis- oder Schiebetachymeter. Z. f. Vermessungswesen 1893 S. 65.

„ Kreistachymeter von Puller-Breithaupt. Z. f. Vermessungswesen 1895 S. 65.

„ Kreistachymeter von Puller-Breithaupt. Z. f. Instrumentenkunde 1896 S. 291.

„ Zur Geschichte der Schiebetachymeter. Z. f. Vermessungswesen 1896 S. 375.

„ Schnellmesser. Ein Schiebetachymeter für lotrechte Lattenstellung. Z. f. Vermessungswesen 1901 S. 531 und 1903 S. 649.

Reinhertz, Ablesung am Strichmikroskop. Z. f. Vermessungswesen 1902 S. 213.

„ Mitteilung einiger Beobachtungen über die Schätzungsgenauigkeit an Maßstäben, insbes. an Nivellierskalen. Z. f. Vermessungsw. 1894 S. 593.

„ Über die Schätzungsgenauigkeit an Nivellierskalen. Z. f. Vermessungswesen 1897 S. 111.

„ Über die Ablesungsgenauigkeit an Nivellierskalen. Z. f. Vermessungswesen 1897 S. 399.

Roncagli, G. Urbani, E., Theorie u. Beschreibung des Reduktionstachymeters. Z. f. Instrumentenk. 1893 S. 381.

Roncagli, G., Rektifikation der diastimometrischen Kurve des Reduktionstachymeters. Z. f. Instrumentenkunde 1895 S. 180.

Schell, Die Tachymetrie. Wien 1880.

Schoingt, Der Puller-Breithauptsche Schnellmesser. Z. f. Vermessungswesen 1903 S. 408.

Stambach, Über die Genauigkeit der Distanzmessung. Z. f. Vermessungswesen 1875 S. 183.

Tichy, A., Das neue Tachymeter nach Patent von Tichy und Starke. Wochenschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins 1878 S. 191.

Tichy, A., Die Präzisionstachymetrie und ihre neuesten instrumentalen Mittel. Z. d. österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins 1892 S. 513.

„ Das Schlußergebnis auf dem Gebiete der graphischen Tachymetrie. Wien 1893.

„ Bemerkungen zu dem Referat „Das Streckenmessen in polygonalen Zügen". Z. f. Instrumentenkunde 1897 S. 317.

Tinter, W. R., Vergleichung über die Leistungsfähigkeit des Kontakt-, eines neuen Faden- und des Stampferschen Distanzmessers. Z. d. österr. Ingenieur- u. Architekten-Vereins 1869 S. 105.

Vogler, Tachymetrisches Nivellierinstrument von F. W. Breithaupt & Sohn. Z. f. Vermessungswesen 1886 S. 473.

„ Die Tangentenkippschraube. Z. f. Vermessungswesen 1891 S. 145.

„ Praktische Geometrie II. Braunschweig 1894.

„ Geodätische Übungen. 2. Auflage. Berlin 1899 und 1901.

„ Grundlehren der Kulturtechnik I, 2. 3. Auflage. Berlin 1903.

Wagner, C., Kreis- oder Schiebetachymeter. Z. f. Vermessungswesen 1893 S. 540.

„ Über die Hilfsmittel der Tachymetrie, insbes. über die Vorzüge der schiefen Lattenaufstellung. Z. f. Vermessungswesen 1886 S. 337.

„ Über die Schätzungsgenauigkeit an Nivellier- u. Distanzskalen. Zeitschrift für Vermessungswesen 1896 S. 449.

Wagner, R., Über die mit dem Reichenbachschen Distanzmesser erreichbare Genauigkeit und einige Erörterungen über d. Fehlerursachen desselben. Z. f. Vermessungswesen 1886 S. 49.

Wellisch, S., Ausgleichungsrechnung I, Wien 1909.
Werkmeister, Über die Benutzung von Näherungsformeln bei Berechnung tachymetrischer Messungen. Z. f. Vermessungswesen 1906 S. 513.
Wolf, Zur Polygonstreckenmessung mittels der Feinbewegung des Theodolits. Z. f. Vermessungswesen 1899 S. 233.
v. Ziegler, V., Handbuch der Tacheographie. Metz 1894.
Deutsche Patentschrift Nr. 24096 (Fehrmann).
„ „ Nr. 247697 (Plath).
Englische „ Nr. 25267 v. J. 1898 (Fergusson).
Amerikanische „ Nr.895330 (Baur).

Lebenslauf.

Am 3. Januar 1872 wurde ich, Hermann Koller, als Sohn des Ziegeleibesitzers Julius Koller und seiner Ehefrau Marie, geb. Veit, zu Luckenwalde geboren und darauf evangelisch getauft. Zunächst besuchte ich von Ostern 1877 ab eine Mittelschule und sodann von Ostern 1883 bis Ostern 1890 das Realprogymnasium meiner Vaterstadt, das ich mit dem Zeugnis der Reife verließ. Ich wurde Landmessereleve bei dem Stadtvermessungsamt zu Berlin, studierte vom Sommerhalbjahr 1891 bis zum Winterhalbjahr 1892/93 Geodäsie und Kulturtechnik an der Landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin und legte dortselbst im Frühjahrstermin 1893 die Landmesser- und kulturtechnische Prüfung ab. Alsdann wurde ich bei den Generalkommissionen für die Provinzen Ostpreußen, Westpreußen, Posen und Schlesien als Landmesser beschäftigt und legte im Frühjahrstermin 1898 die Prüfung für die Vermessungsbeamten der Landwirtschaftlichen Verwaltung ab. Vom 1. Oktober 1898 bis zum 30. September 1903 war ich Assistent für Geodäsie an der Landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin unter Geheimrat Professor Vogler. Von ihm erhielt ich reiche Anregungen für meine Fortbildung in der Geodäsie. Während jener Zeit studierte ich zugleich Bauingenieurwissenschaften an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg und legte dortselbst zu Ostern 1900 die Diplom-Vorprüfung, im Januar 1903 die Diplom-Hauptprüfung ab. Vom 1. Oktober 1903 wurde ich als Hilfslehrer an der Baugewerkschule zu Stettin beschäftigt und am 15. September 1904 zum Oberlehrer ernannt. Im April 1909 wurde ich in dieser Stellung nach Cassel versetzt, von wo aus ich vom Winterhalbjahr 1910/11 bis zum Sommerhalbjahr 1912 Vorlesungen an der Universität Marburg belegte. Hier fand ich die erwünschte Gelegenheit, mich in der reinen und angewandten Mathematik und in der Physik weiter zu bilden. Bei diesem Bestreben haben mich die Herren Professoren Geheimrat Hensel, Richarz, Neumann, v. Dalwigk stets bereitwilligst mit ihrem Rat unterstützt. Ihnen allen möchte ich auch hiermit nochmals gebührenden Dank abstatten, vor allen den Herren Professoren Richarz und v. Dalwigk, deren Rat ich besonders oft erbeten habe. Am 25. Februar 1914 legte ich das Rigorosum ab und lebte seit dieser Zeit in Cassel.

Lebenslauf.